Programação inteira mais rápida via achatamento de subespaços

Victor Reis

UNIVERSITY of WASHINGTON

IAS | INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY

Minha trajetória olímpica

Minha trajetória olímpica

OBM 2008:

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009:

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010:

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010: Nada

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010: Nada

OBM 2011:

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010: Nada

OBM 2011: Menção Honrosa

OMCPLP 2012

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010: Nada

OBM 2011: Menção Honrosa

OMCPLP 2012: Prata

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada

OBM 2009: Nada

OBM 2010: Nada

OBM 2011: Menção Honrosa

OMCPLP 2012: Prata

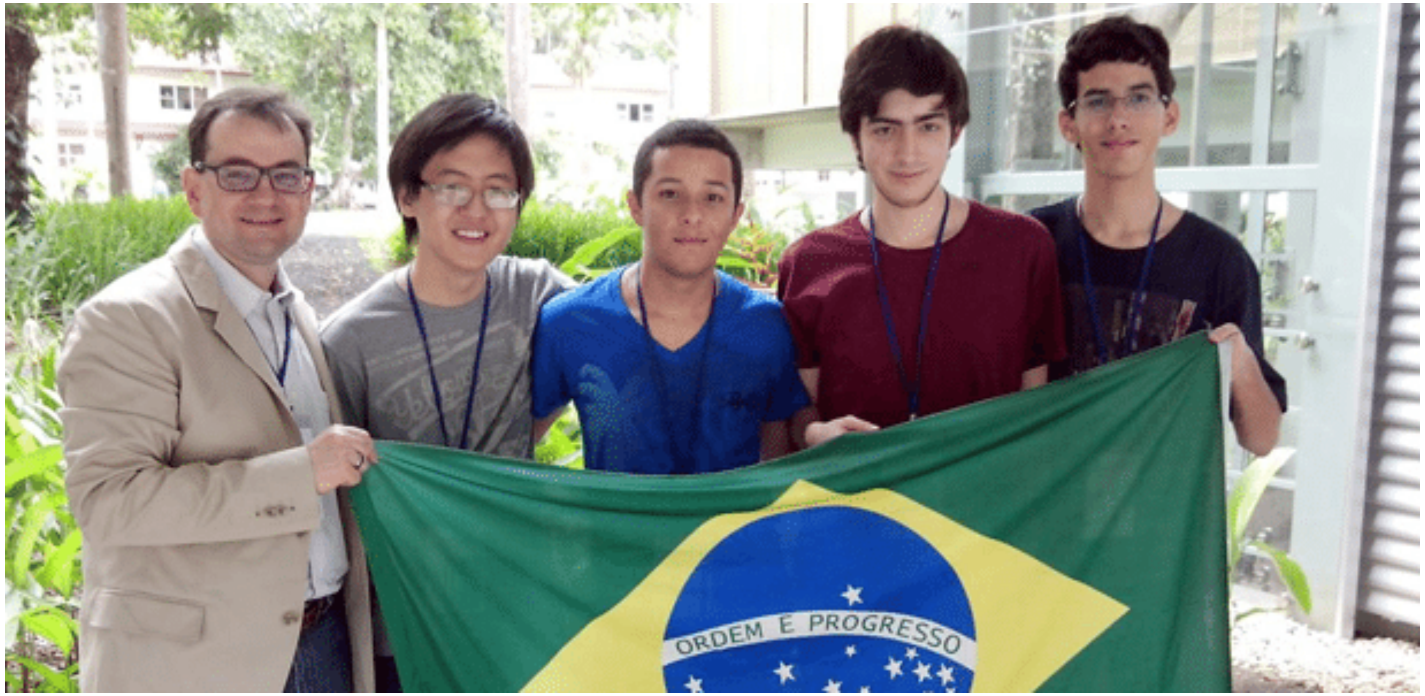
OBM 2012: Prata

RMM 2013

Cone Sul 2013

IMO 2013

Ibero 2013



Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata
OBM 2013: Ouro

IMO 2014

Minha trajetória olímpica

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata
OBM 2013: Ouro
IMO 2014: Bronze

Minha trajetória ~~olímpica~~

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata
OBM 2013: Ouro
IMO 2014: Bronze

Cornell University (2014 – 2018)

Minha trajetória ~~olímpica~~

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata
OBM 2013: Ouro
IMO 2014: Bronze

Cornell University (2014 – 2018)

Ph.D. (2018 – 2023)

Minha trajetória ~~olímpica~~

OBM 2008: Nada
OBM 2009: Nada
OBM 2010: Nada
OBM 2011: Menção Honrosa
OMCPLP 2012: Prata
OBM 2012: Prata
RMM 2013: Bronze
Cone Sul 2013: Ouro
IMO 2013: Prata
Ibero 2013: Prata
OBM 2013: Ouro
IMO 2014: Bronze

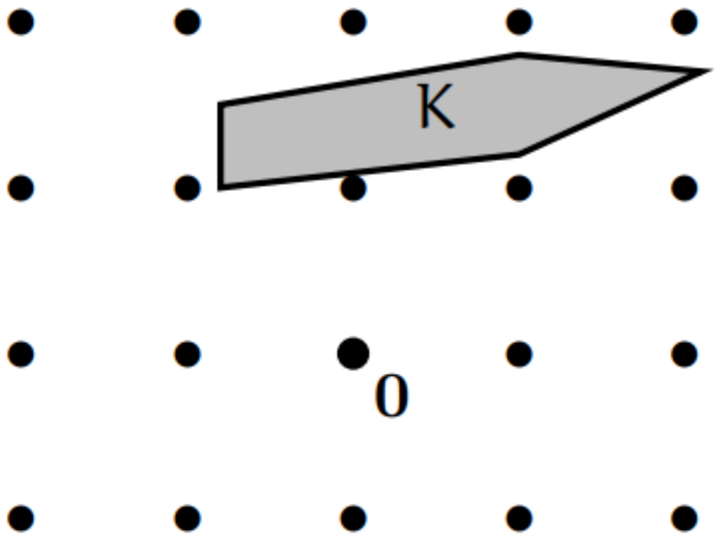
Cornell University (2014 – 2018)

Ph.D. (2018 – 2023)

Postdoc (2023 – 2024)

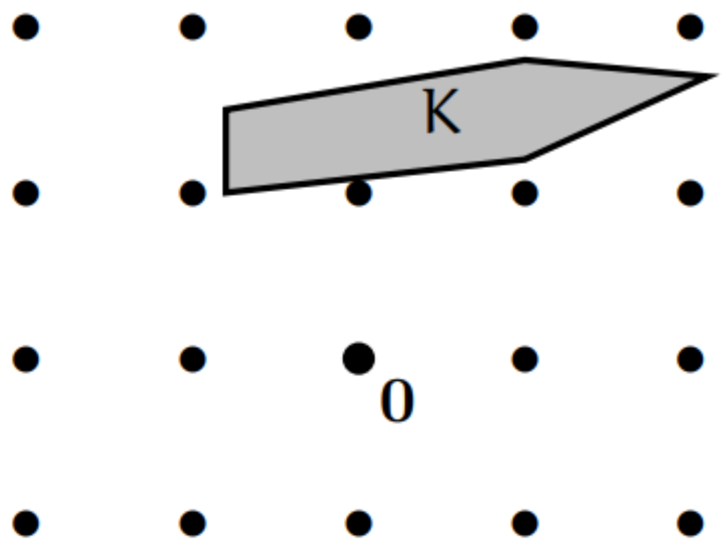
Programação inteira (PI)

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$,



Programação inteira (PI)

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$,



encontre um ponto em $K \cap \mathbb{Z}^n$ ou demonstre que não existe nenhum.

Dantzig, Fulkerson e Johnson (1954)

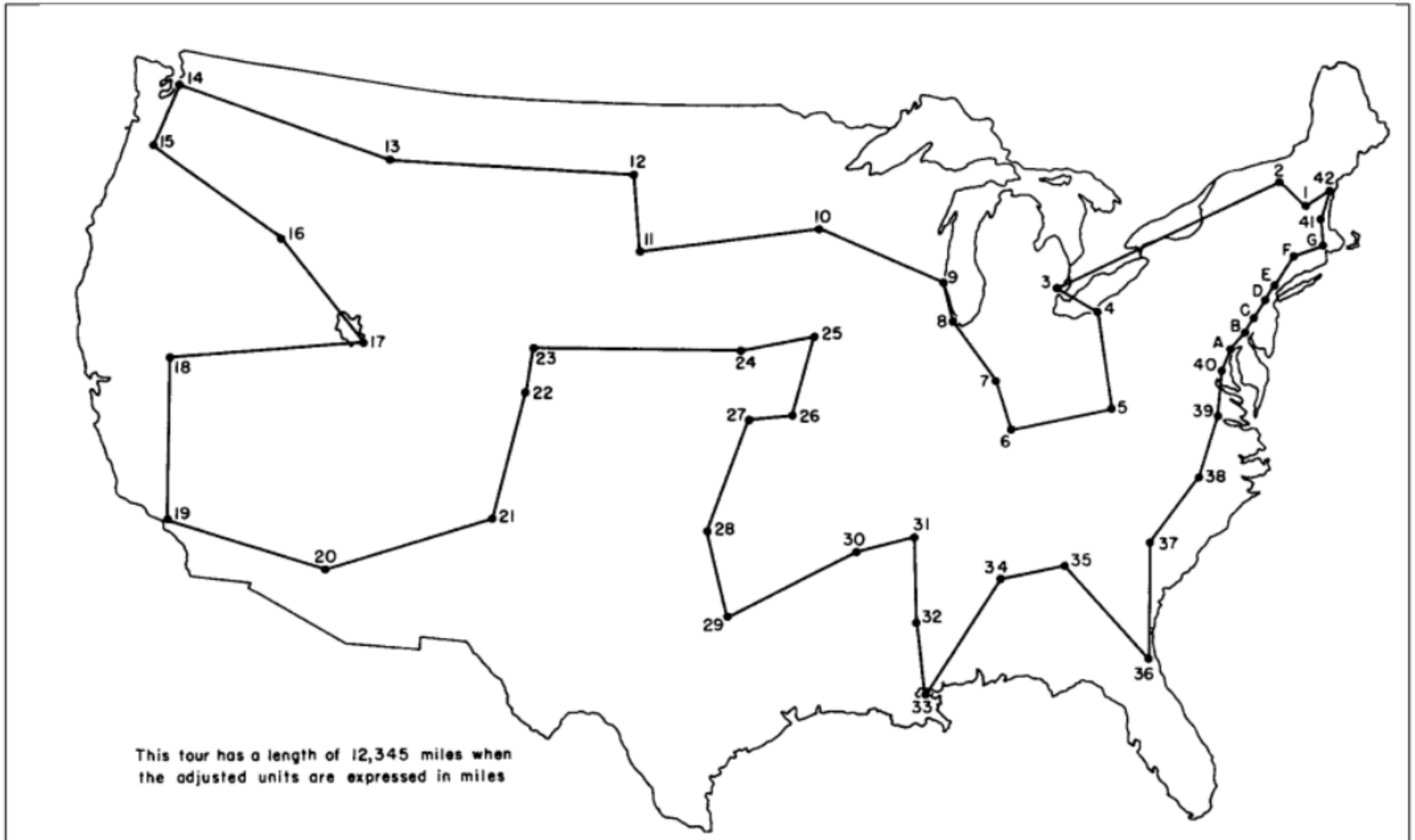


FIG. 16. The optimal tour of 49 cities.

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito
- 1960: Land e Doig desenvolvem o método de ‘ramificar e limitar’

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito
- 1960: Land e Doig desenvolvem o método de ‘ramificar e limitar’
- 1983: Lenstra resolve PI em tempo 2^{n^3}

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito
- 1960: Land e Doig desenvolvem o método de ‘ramificar e limitar’
- 1983: Lenstra resolve PI em tempo 2^{n^3}
- 1987: Kannan resolve PI em tempo $n^{2.5n}$

História da programação inteira

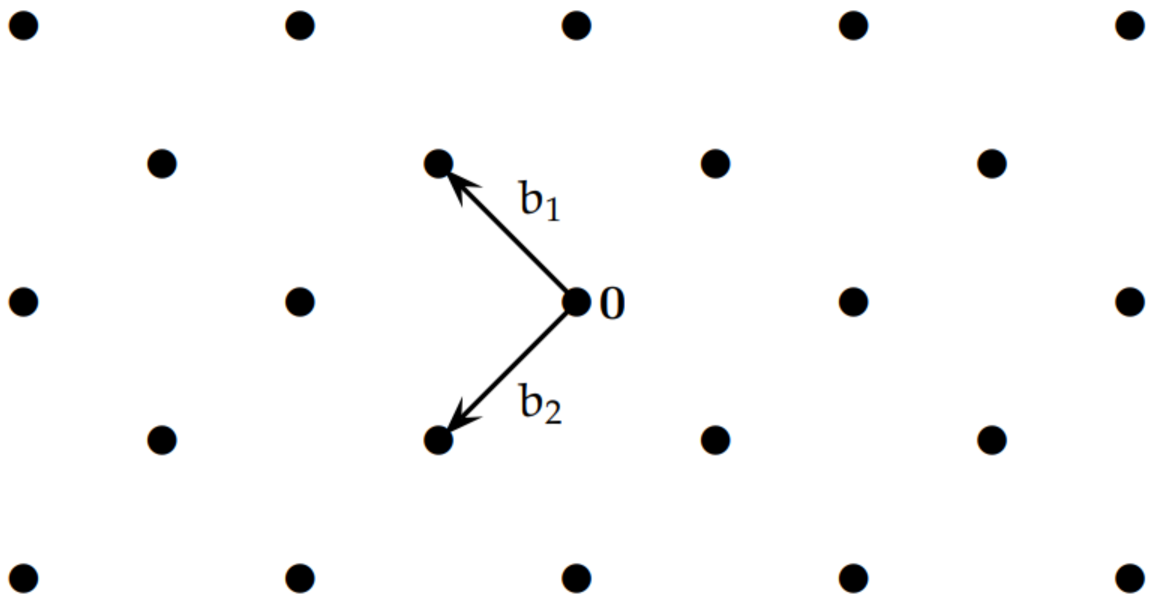
- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito
- 1960: Land e Doig desenvolvem o método de ‘ramificar e limitar’
- 1983: Lenstra resolve PI em tempo 2^{n^3}
- 1987: Kannan resolve PI em tempo $n^{2.5n}$
- 2012: Dadush resolve PI em tempo n^n

História da programação inteira

- 1954: Dantzig, Fulkerson e Johnson resolvem PCV em 49 cidades
- 1958: Gomory desenvolve um algoritmo em tempo finito
- 1960: Land e Doig desenvolvem o método de ‘ramificar e limitar’
- 1983: Lenstra resolve PI em tempo 2^{n^3}
- 1987: Kannan resolve PI em tempo $n^{2.5n}$
- 2012: Dadush resolve PI em tempo n^n
- 2023: R. e Rothvoss: PI em tempo $(\log n)^{4n}$

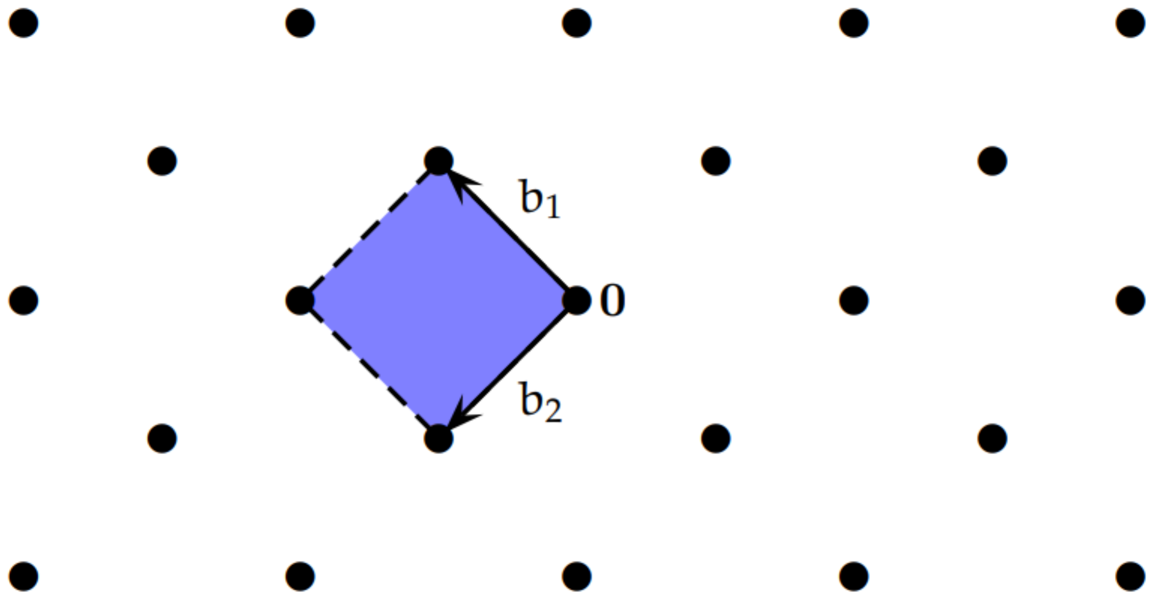
Reticulados

- $\mathscr{L} = \{z_1 b_1 + z_2 b_2 + \ldots + z_n b_n : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$



Reticulados

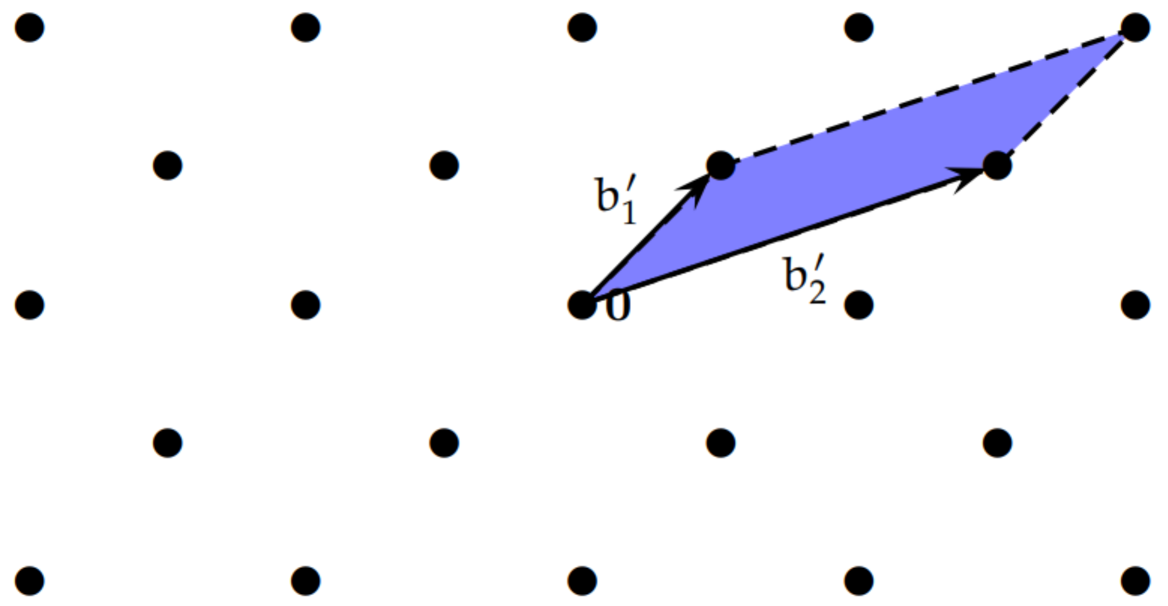
- $\mathscr{L} = \{z_1 b_1 + z_2 b_2 + \ldots + z_n b_n : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$



- $\det(\mathscr{L}) := \mathrm{vol}\left(\left\{ x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n : x_1, \ldots, x_n \in [0,1] \right\}\right)$

Reticulados

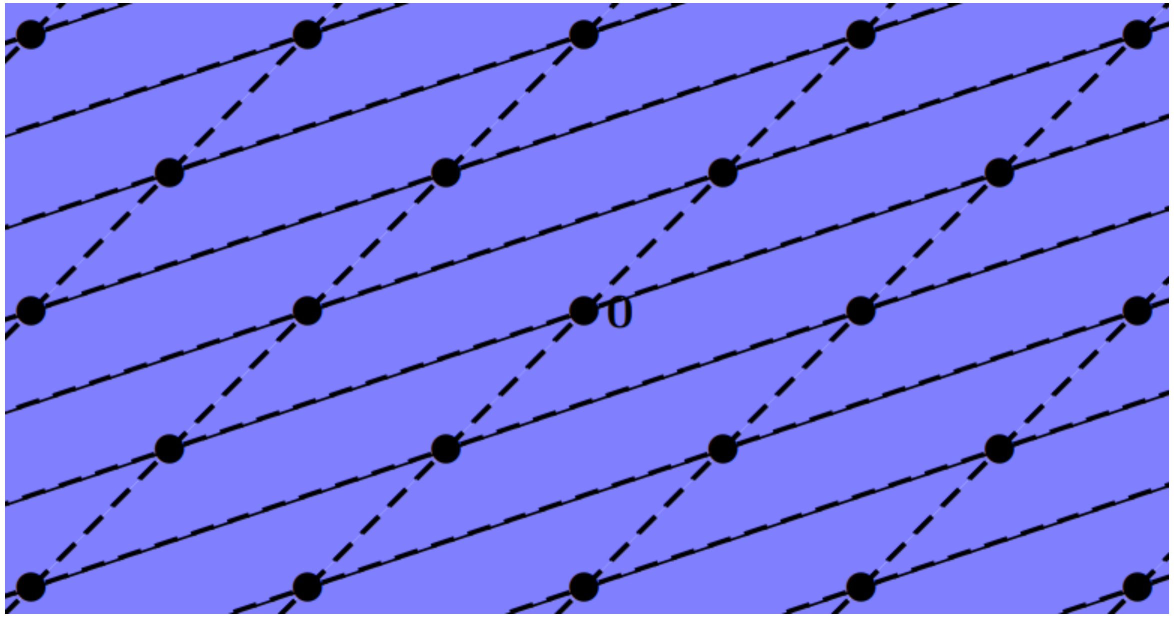
- $\mathscr{L} = \{z_1 b_1 + z_2 b_2 + \ldots + z_n b_n : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$



- $\det(\mathscr{L}) := \mathrm{vol}\left(\left\{x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n : x_1, \ldots, x_n \in [0,1]\right\}\right)$

Reticulados

- $\mathscr{L} = \{z_1b_1 + z_2b_2 + \ldots + z_nb_n : z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$

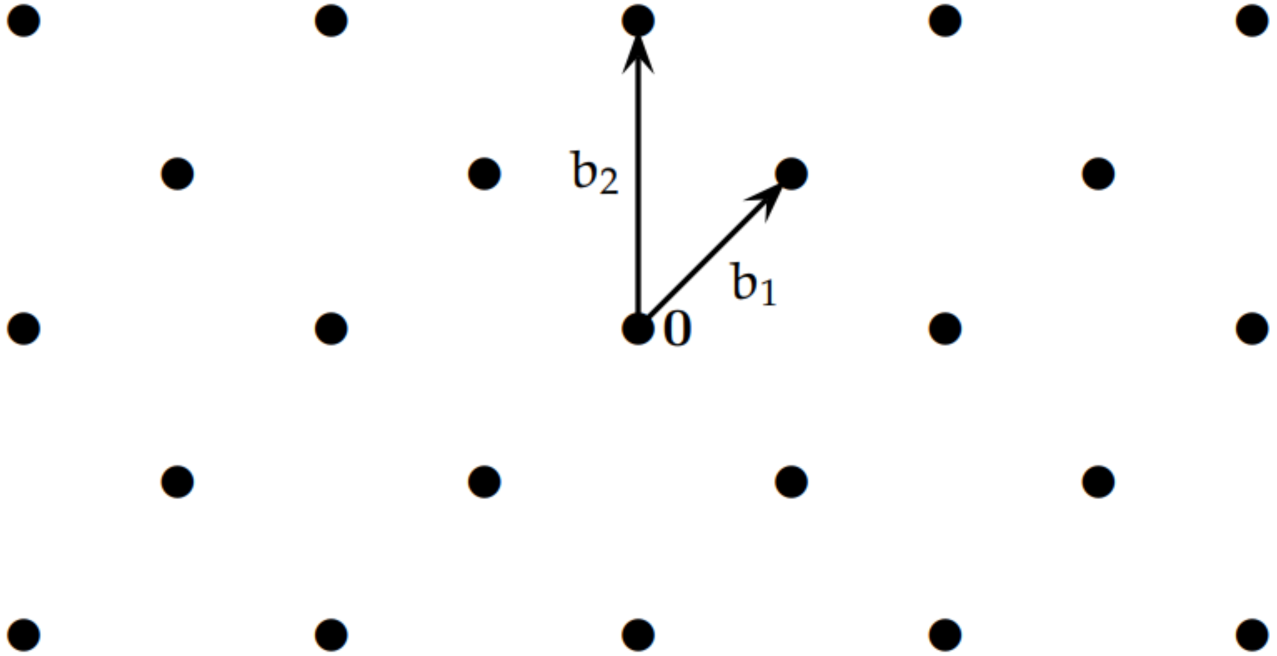


- $\det(\mathscr{L}) := \mathrm{vol}\left(\left\{x_1b_1 + \ldots + x_nb_n : x_1, \ldots, x_n \in [0,1]\right\}\right)$
- $\mathscr{L} + \left\{x_1b_1 + \ldots + x_nb_n : x_1, \ldots, x_n \in [0,1]\right\} = \mathbb{R}^n$

Raio cobertor

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o *raio cobertor*

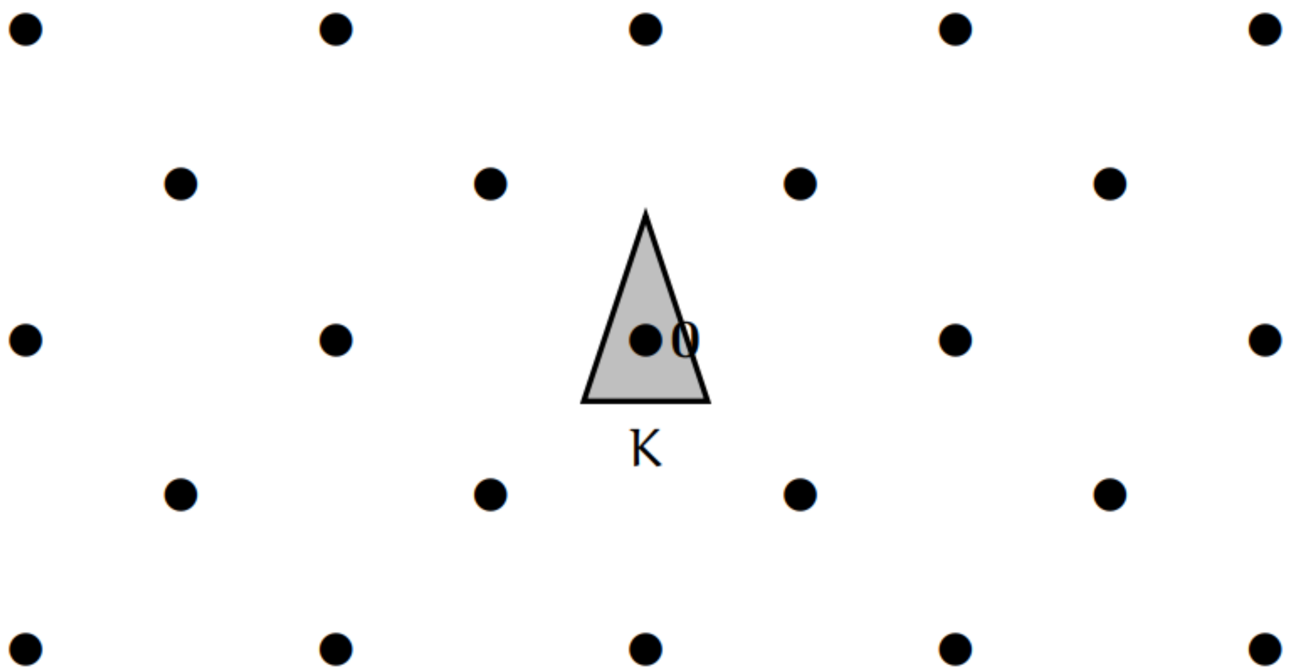
$$\mu(\mathcal{L}, K) \quad := \quad \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\}$$



Raio cobertor

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o *raio cobertor*

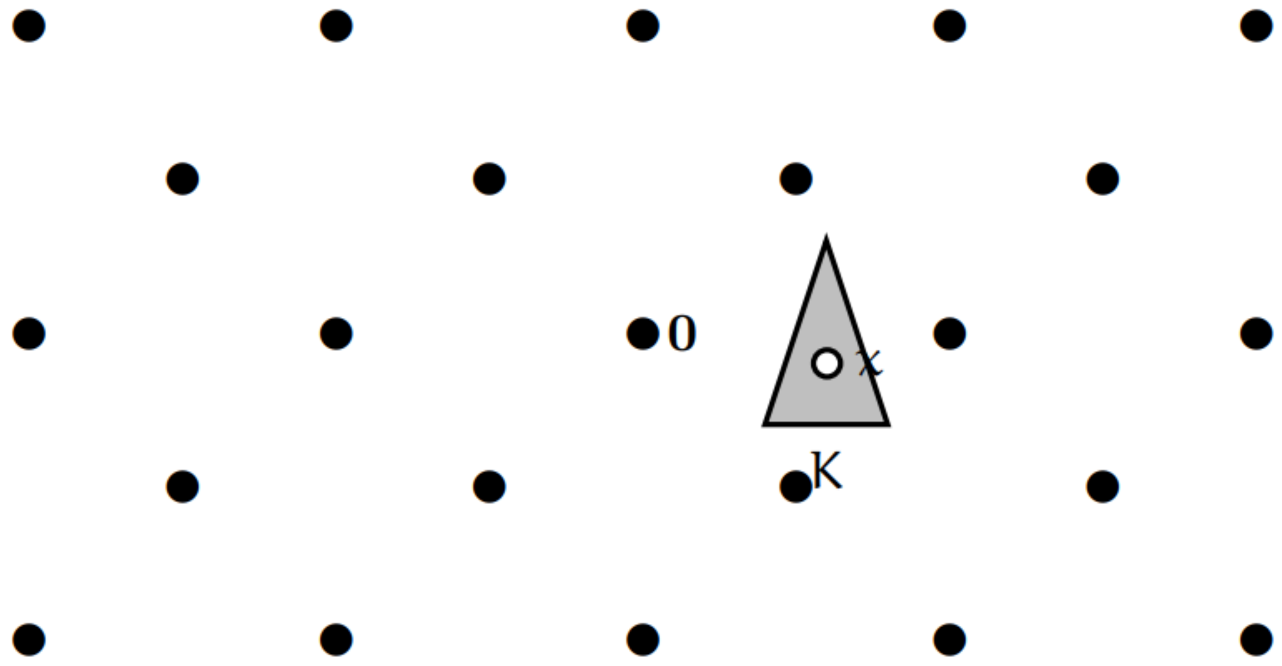
$$\mu(\mathcal{L}, K) := \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\}$$



Raio cobertor

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o *raio cobertor*

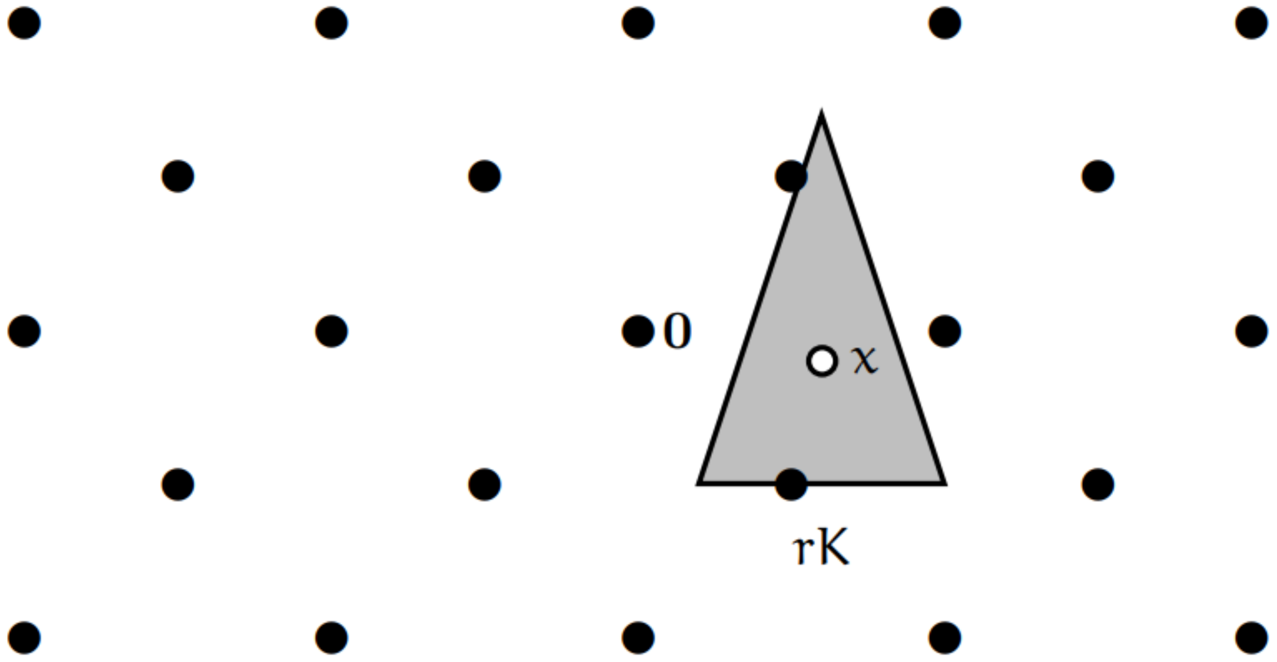
$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{L}, K) &:= \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\} \\ &= \min\{r > 0 \mid (x + rK) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$



Raio cobertor

- Dado um conjunto convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o *raio cobertor*

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{L}, K) &:= \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\} \\ &= \min\{r > 0 \mid (x + rK) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$



Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu(\mathcal{L}, K) \quad := \quad \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\}$$

- Se $\mathscr{L} + K = \mathbb{R}^n$, temos $\mathrm{vol}(K) \geq \det\left(\mathscr{L}\right)$.

Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu(\mathcal{L}, K) \quad := \quad \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\}$$

- Se $\mathscr{L} + K = \mathbb{R}^n$, temos $\mathrm{vol}(K) \geq \det\left(\mathscr{L}\right)$.

- Portanto
  $\mathrm{vol}\left(\mu\left(\mathscr{L}, K\right) \cdot K\right) \geq \det\left(\mathscr{L}\right) \Rightarrow \mu\left(\mathscr{L},\ K\right)^n \cdot\ \mathrm{vol}(K) \geq \det\left(\mathscr{L}\right)$.

Cotas inferiores no raio cobertor

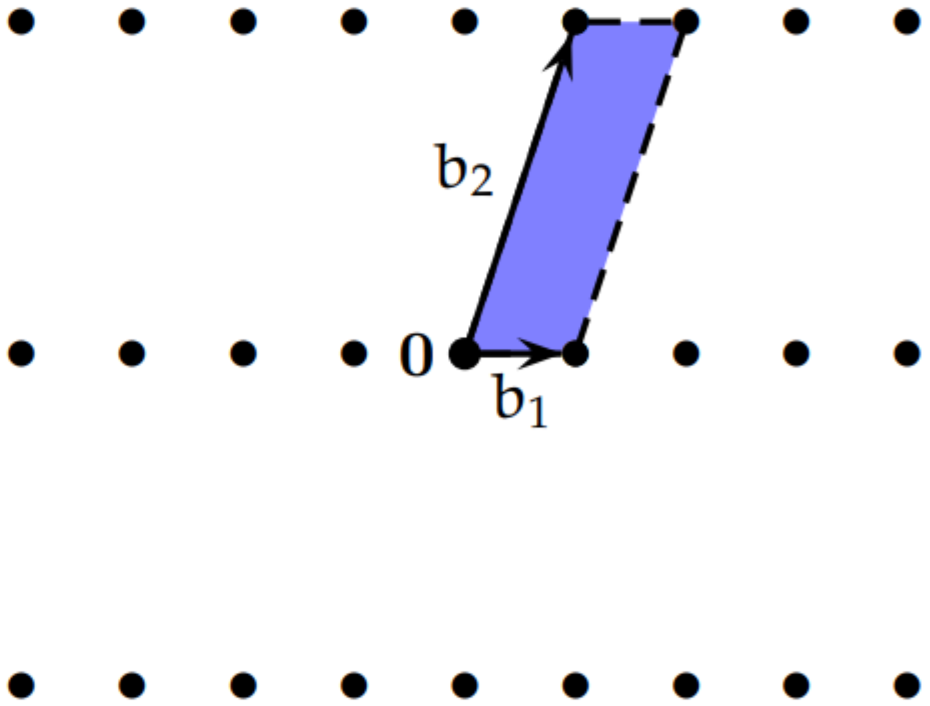
$$\mu(\mathcal{L}, K) \quad := \quad \min\{r > 0 \mid \mathcal{L} + rK = \mathbb{R}^n\}$$

- Se $\mathscr{L} + K = \mathbb{R}^n$, temos $\mathrm{vol}(K) \geq \det(\mathscr{L})$.

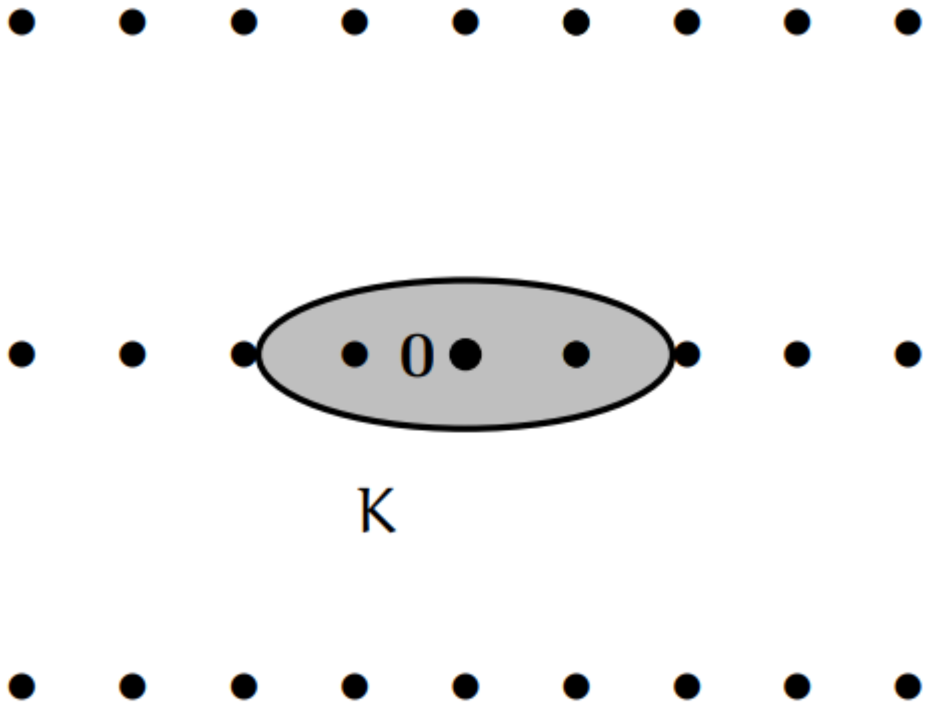
- Portanto $\mathrm{vol}\left(\mu(\mathscr{L}, K) \cdot K\right) \geq \det(\mathscr{L}) \Rightarrow \mu(\mathscr{L},\ K)^n \cdot\ \mathrm{vol}(K) \geq \det(\mathscr{L})$.

- Conclusão: $\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\dfrac{\det(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Cotas inferiores no raio cobertor

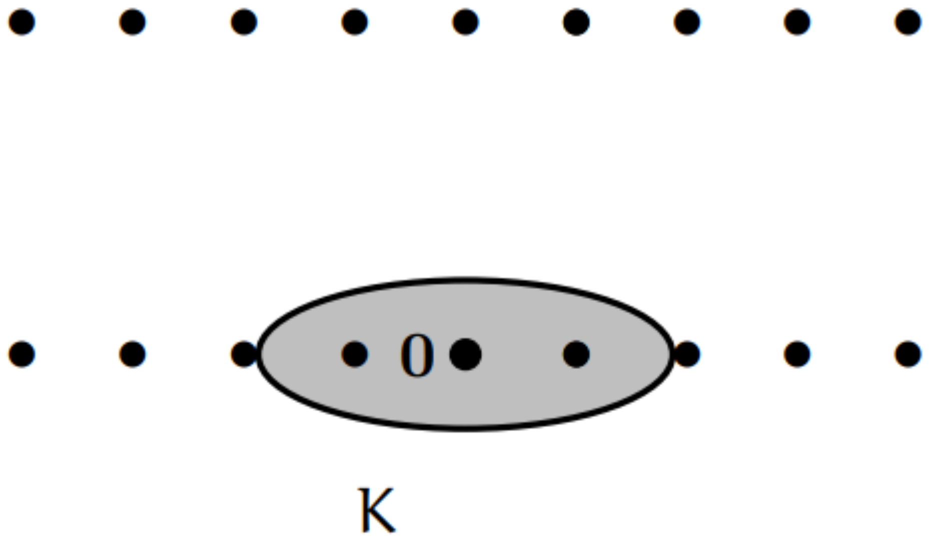


Cotas inferiores no raio cobertor



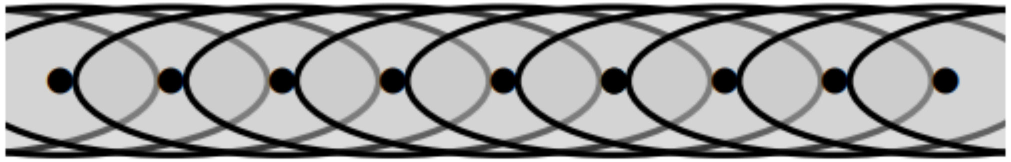
Cotas inferiores no raio cobertor

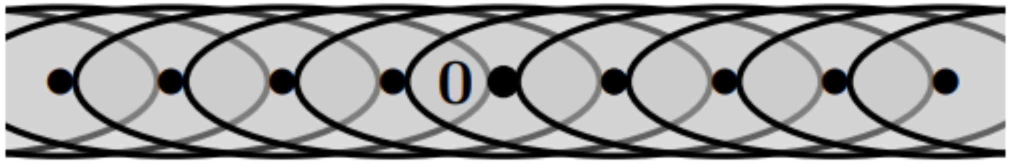
$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\mathscr{L})}{\operatorname{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

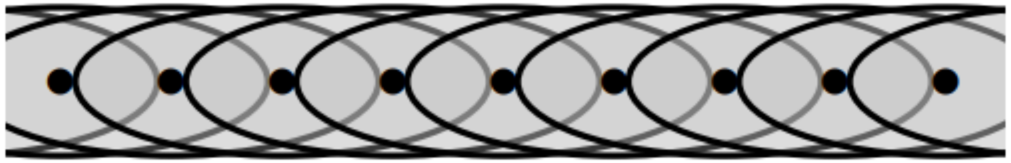


Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(K)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

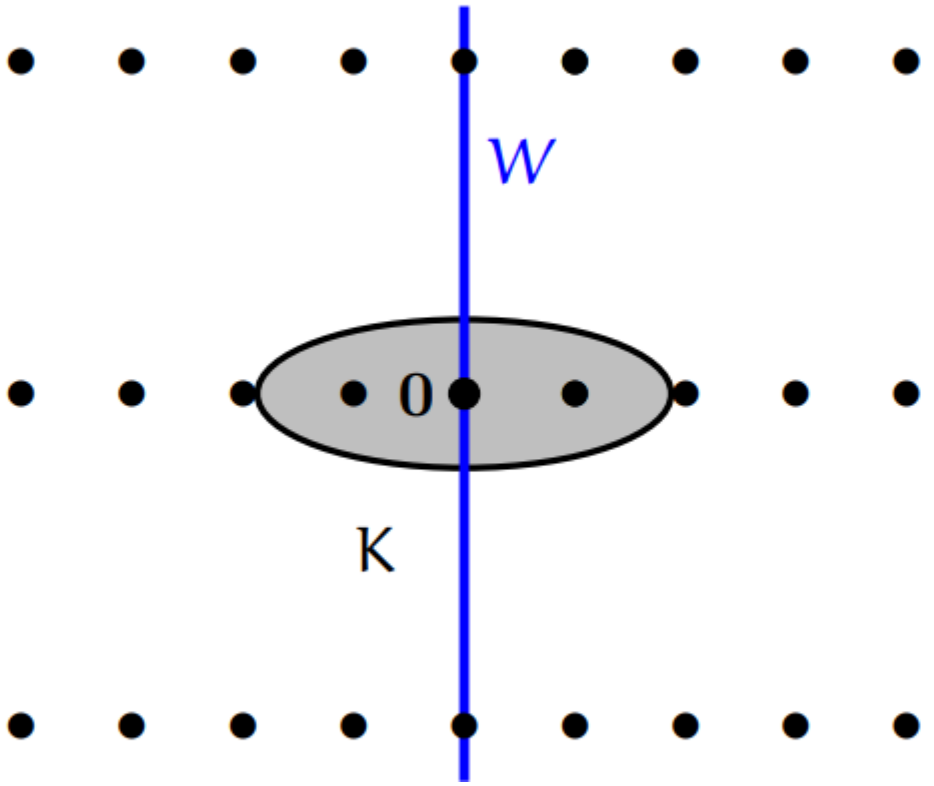






Cotas inferiores no raio cobertor

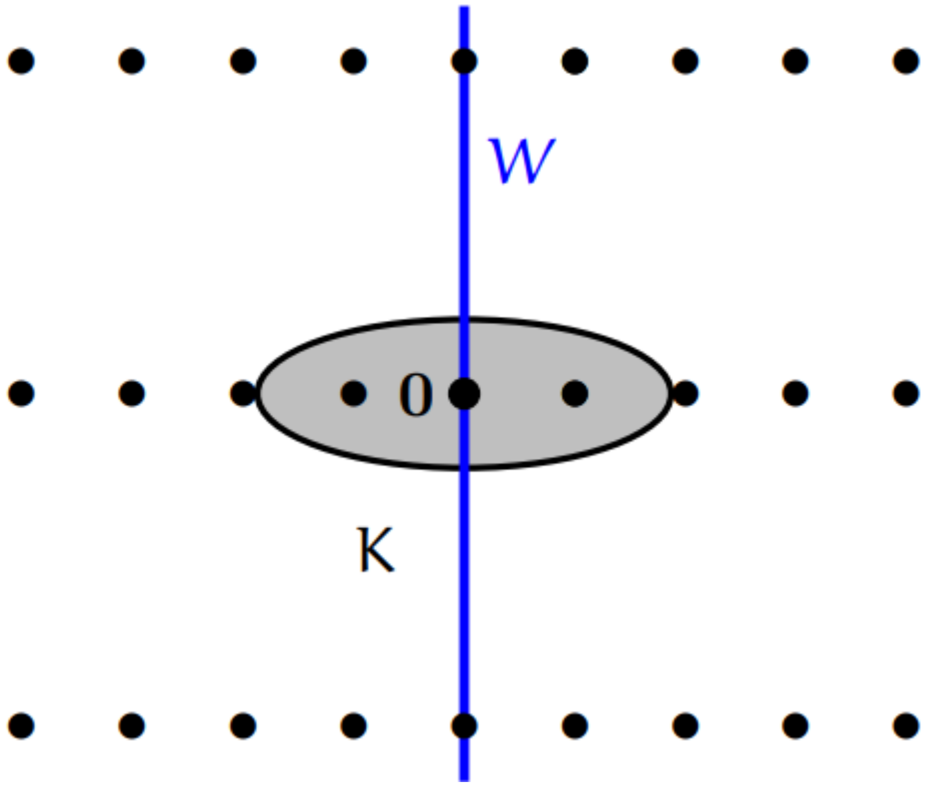
$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$



Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

π_W := Projeção em W

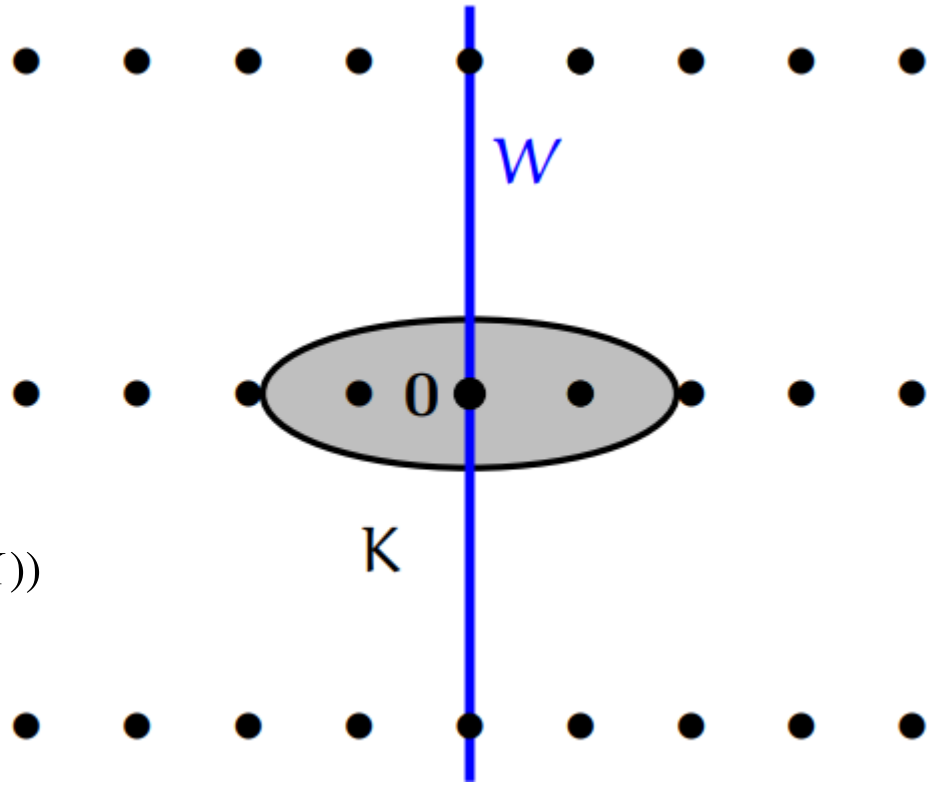


Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\pi_W :=$ Projeção em W

$$\mu(\mathscr{L},\ K) \geq \mu(\pi_W(\mathscr{L}),\ \pi_W(K))$$

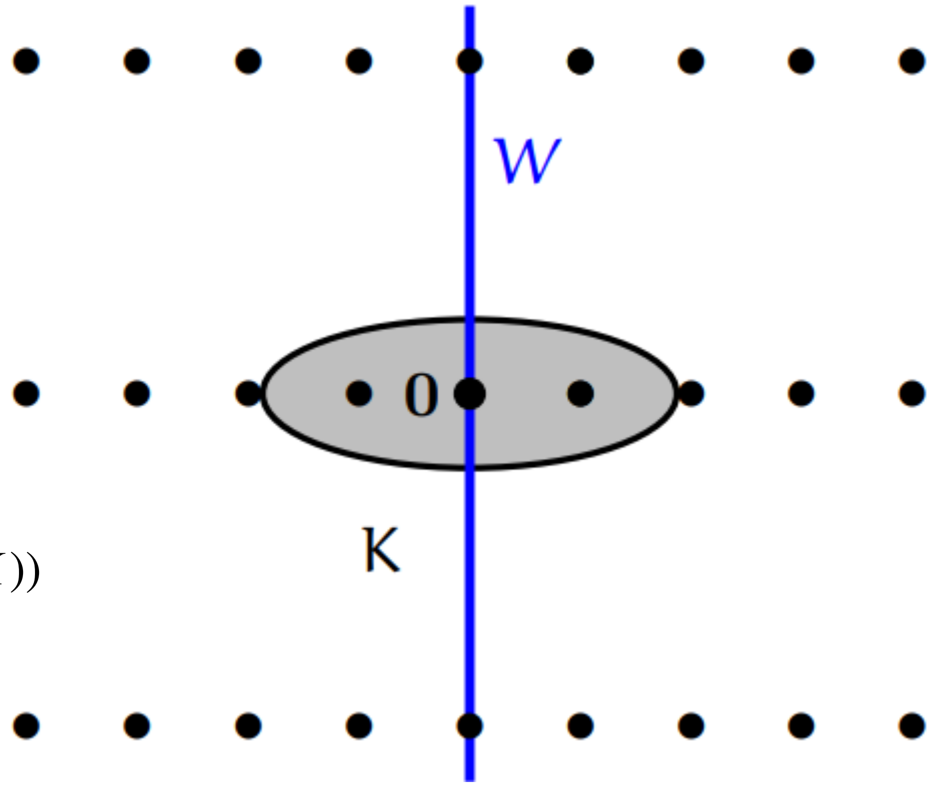


Cotas inferiores no raio cobertor

$$\mu\left(\mathscr{L},\ K\right) \geq \left(\frac{\det\left(\mathscr{L}\right)}{\mathrm{vol}(K)}\right)^{\frac{1}{n}}$$

π_W := Projeção em W

$$\mu\left(\mathscr{L},\ K\right) \geq \mu(\pi_W\left(\mathscr{L}\right),\ \pi_W(K))$$



$$\mu\left(\mathscr{L},\ K\right) \geq \mu\left(\pi_W\left(\mathscr{L}\right),\ \pi_W(K)\right) \geq \left(\frac{\det\left(\pi_W(\mathscr{L})\right)}{\mathrm{vol}\left(\pi_W(K)\right)}\right)^{\frac{1}{\dim(W)}}$$

Teorema de Kannan-Lovász (1988)

- Para quaisquer $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n$ existe um subespaço W tal que

$$n \cdot \left(\frac{\det\left(\pi_W(\mathscr{L})\right)}{\mathrm{vol}\left(\pi_W(K)\right)} \right)^{\frac{1}{\dim(W)}} \geq \mu\left(\mathscr{L},\ K\right) \geq \left(\frac{\det\left(\pi_W(\mathscr{L})\right)}{\mathrm{vol}\left(\pi_W(K)\right)} \right)^{\frac{1}{\dim(W)}}$$

Teorema de Reis-Rothvoss (2023)

- Para quaisquer $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n$ existe um subespaço W tal que

$$(\log n)^3 \cdot \left(\frac{\det\left(\pi_W(\mathscr{L})\right)}{\mathrm{vol}\left(\pi_W(K)\right)}\right)^{\frac{1}{\dim(W)}} \geq \mu\left(\mathscr{L},\ K\right) \geq \left(\frac{\det\left(\pi_W(\mathscr{L})\right)}{\mathrm{vol}\left(\pi_W(K)\right)}\right)^{\frac{1}{\dim(W)}}$$

Teorema de Reis-Rothvoss (2023)

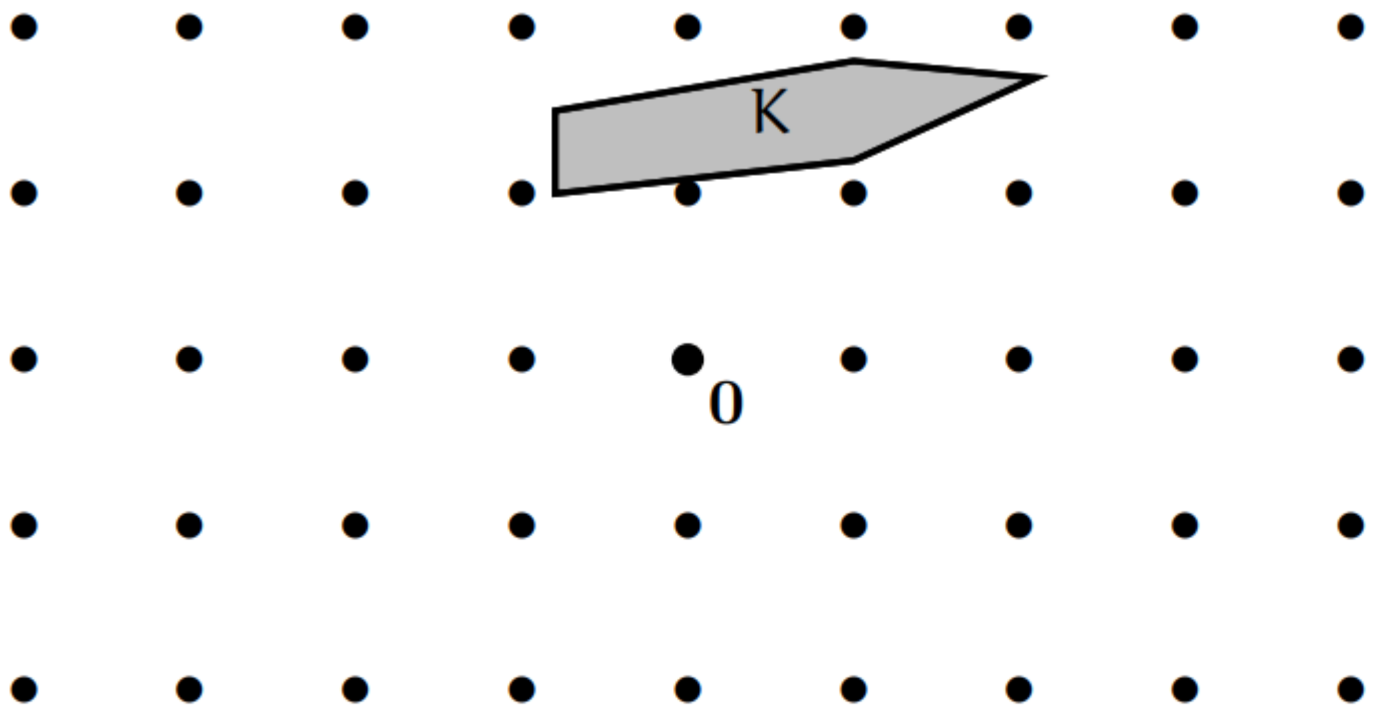
- Para quaisquer $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n$ existe um subespaço W tal que

$$(\log n)^3 \cdot \left(\frac{\det(\pi_W(\mathscr{L}))}{\operatorname{vol}(\pi_W(K))}\right)^{\frac{1}{\dim(W)}} \geq \mu(\mathscr{L},\ K) \geq \left(\frac{\det(\pi_W(\mathscr{L}))}{\operatorname{vol}(\pi_W(K))}\right)^{\frac{1}{\dim(W)}}$$

- O que isso tem a ver com Programação Inteira?

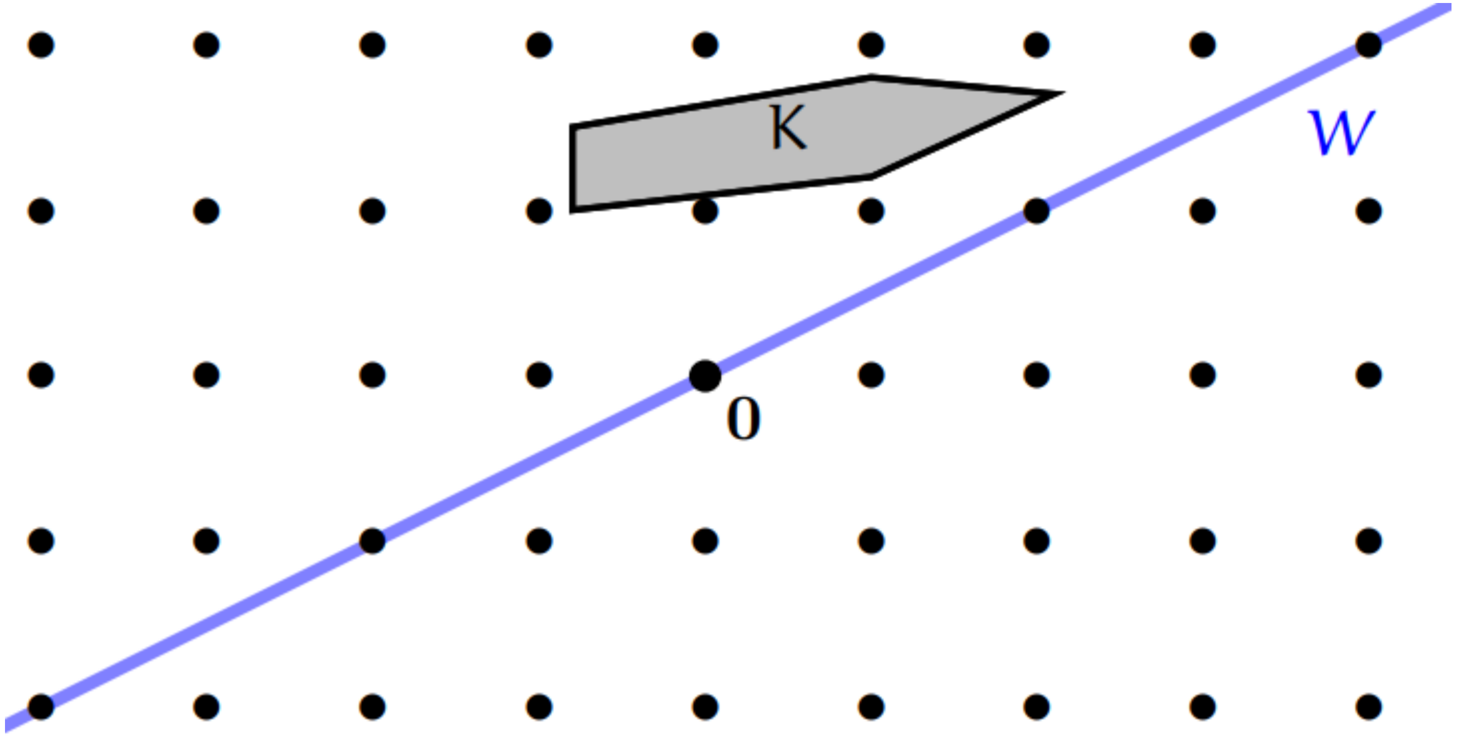
Algoritmo de Dadush

- Dados $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n,$ mostrar que $\mathscr{L} \cap K = \varnothing$ ou encontrar algum ponto na interseção.



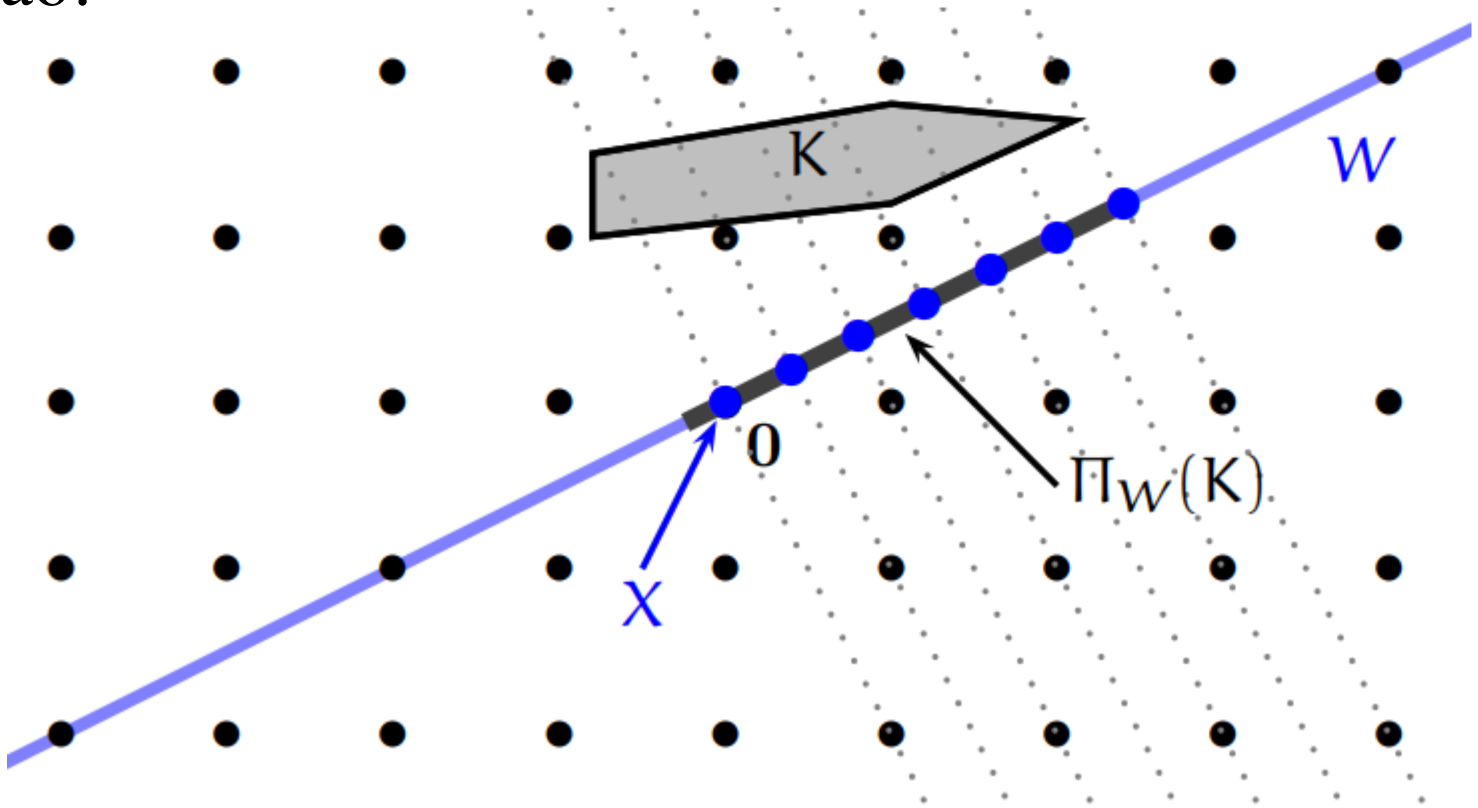
Algoritmo de Dadush

- Dados $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n,$ mostrar que $\mathscr{L} \cap K = \emptyset$ ou encontrar algum ponto na interseção.



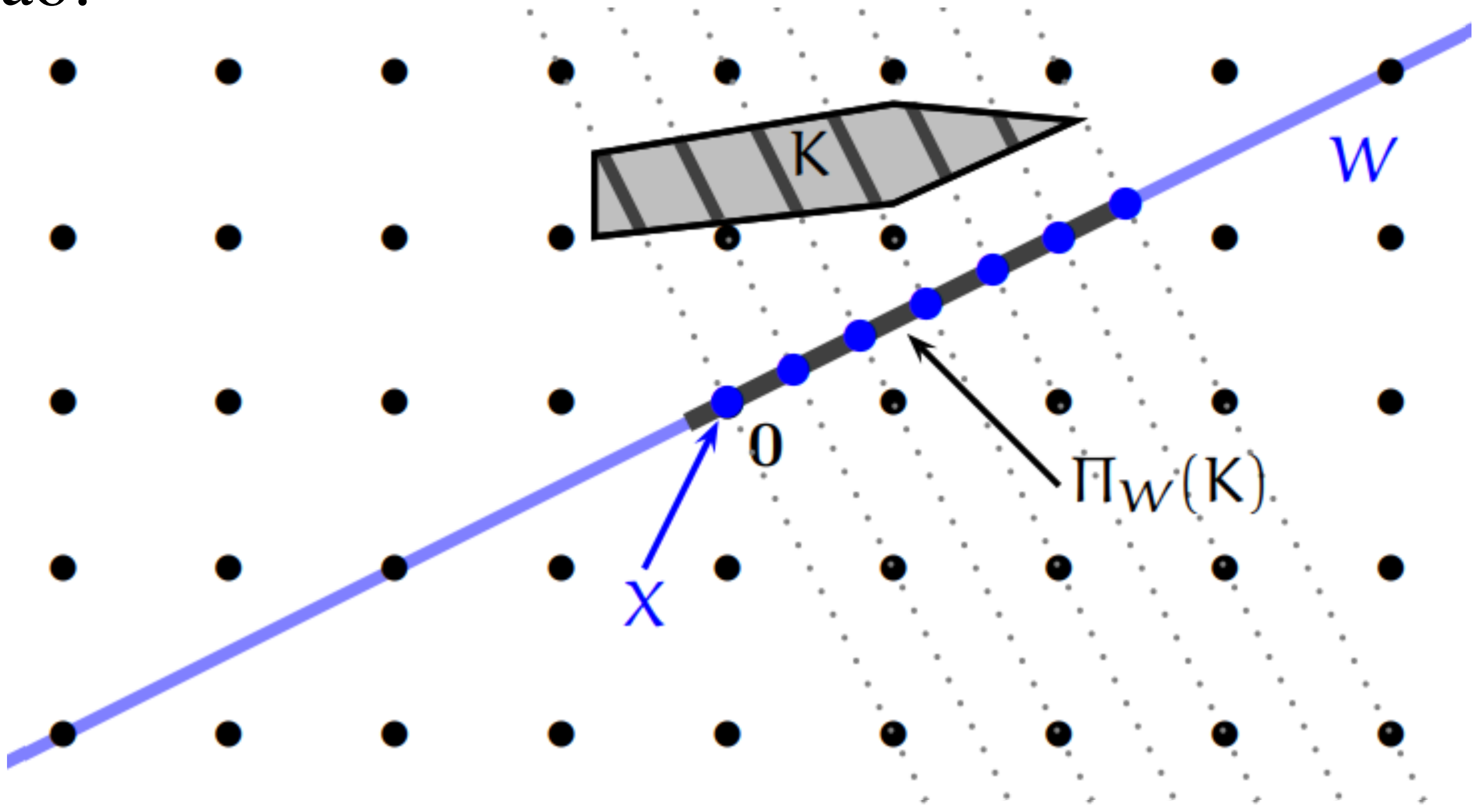
Algoritmo de Dadush

- Dados $\mathscr{L},\ K \subseteq \mathbb{R}^n,$ mostrar que $\mathscr{L} \cap K = \varnothing$ ou encontrar algum ponto na interseção.



Algoritmo de Dadush

- Dados $\mathscr{L}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, mostrar que $\mathscr{L} \cap K = \emptyset$ ou encontrar algum ponto na interseção.



Problema em aberto

- Mostramos que dá pra resolver PI em tempo $(\log n)^{4n}$

- Dá pra resolver PI em tempo 2^n?

Problema em aberto

- Mostramos que dá pra resolver PI em tempo $(\log n)^{4n}$

- Dá pra resolver PI em tempo 2^n? Não se sabe…

Problema em aberto

- Mostramos que dá pra resolver PI em tempo $(\log n)^{4n}$
- Dá pra resolver PI em tempo 2^n? Não se sabe…

Obrigado pela atenção!