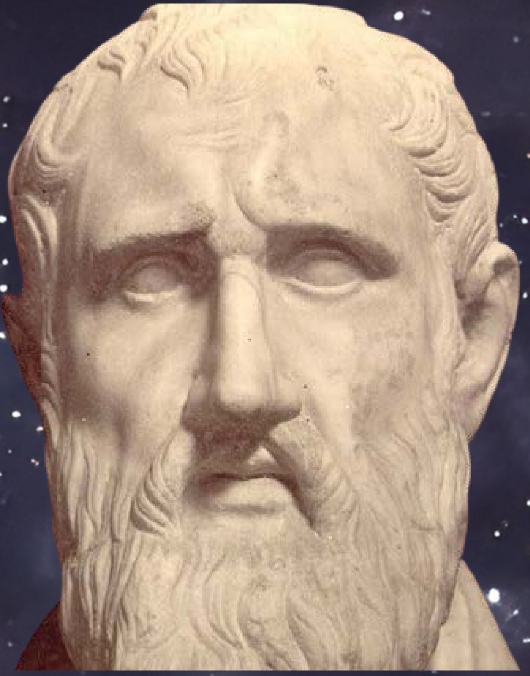
Ao infinito e além

MATEMATIQUE

Noemi Zeraick Monteiro

“Nenhuma outra questão comoveu tão profundamente o espírito do homem; nenhuma outra ideia estimulou tão frutuosamente seu intelecto; contudo, nenhum outro conceito necessita de maior esclarecimento do que o do infinito.” David Hilbert (1862-1943)



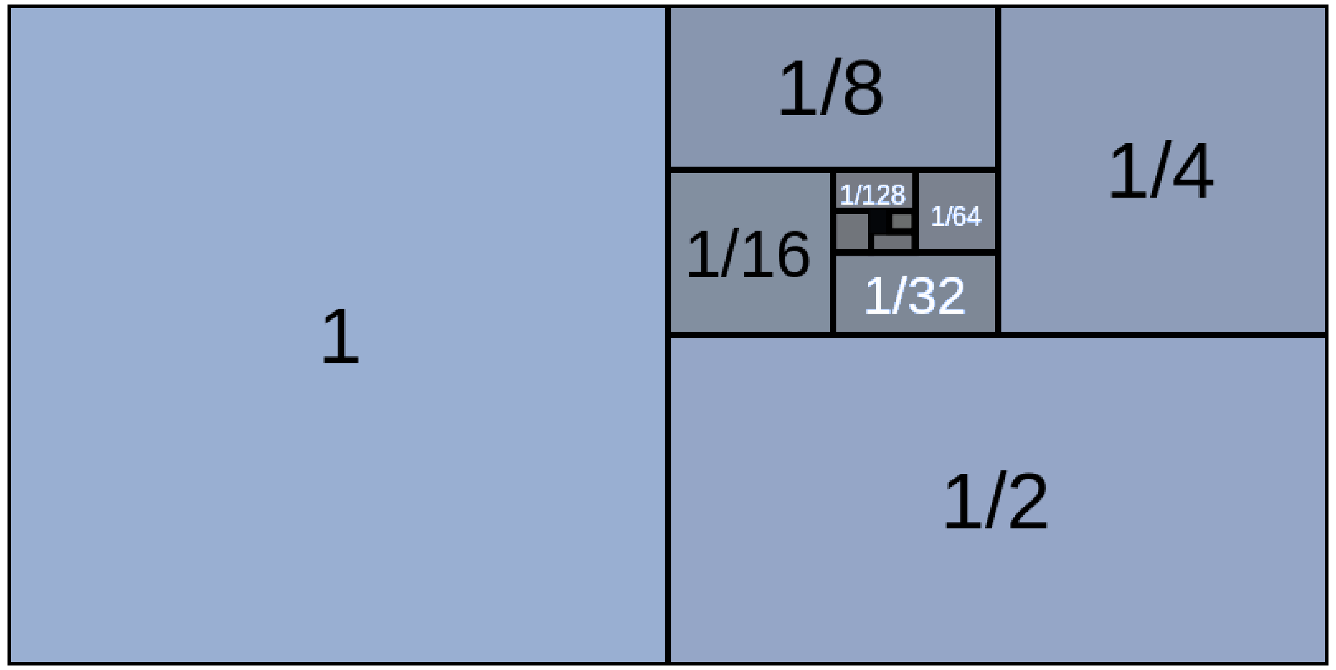
Alguém passou pela tartaruga?
Zenão de Eleia ~ 450 a.C.

O infinito real não existe (exceto a divindade).
Aristóteles ~ 350 a.C.

A quantidade de números primos "é maior do que qualquer quantidade determinada". Euclides ~ 300 a.C.

Na geometria projetiva, as retas paralelas se encontram no infinito. Girard Desargues (1591 - 1661)

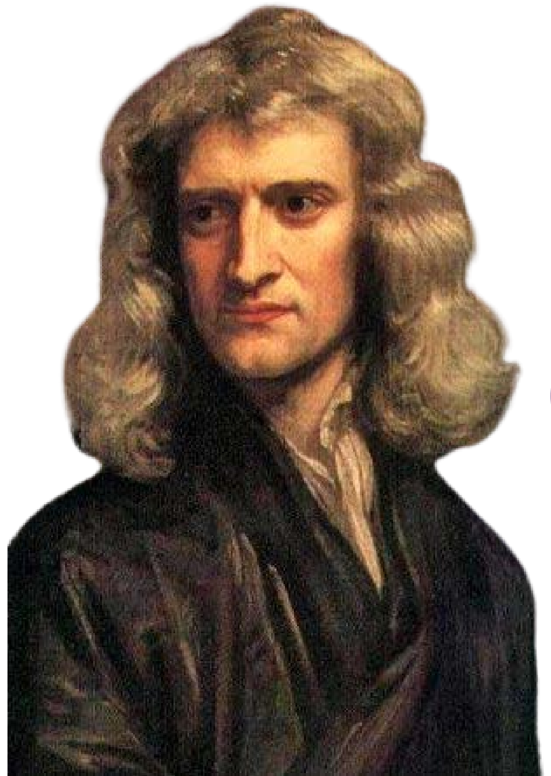
Séries infinitas e outras coisas estranhas



$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots = \frac{\sin x}{x}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$



Isaac Newton
(1643-1727)

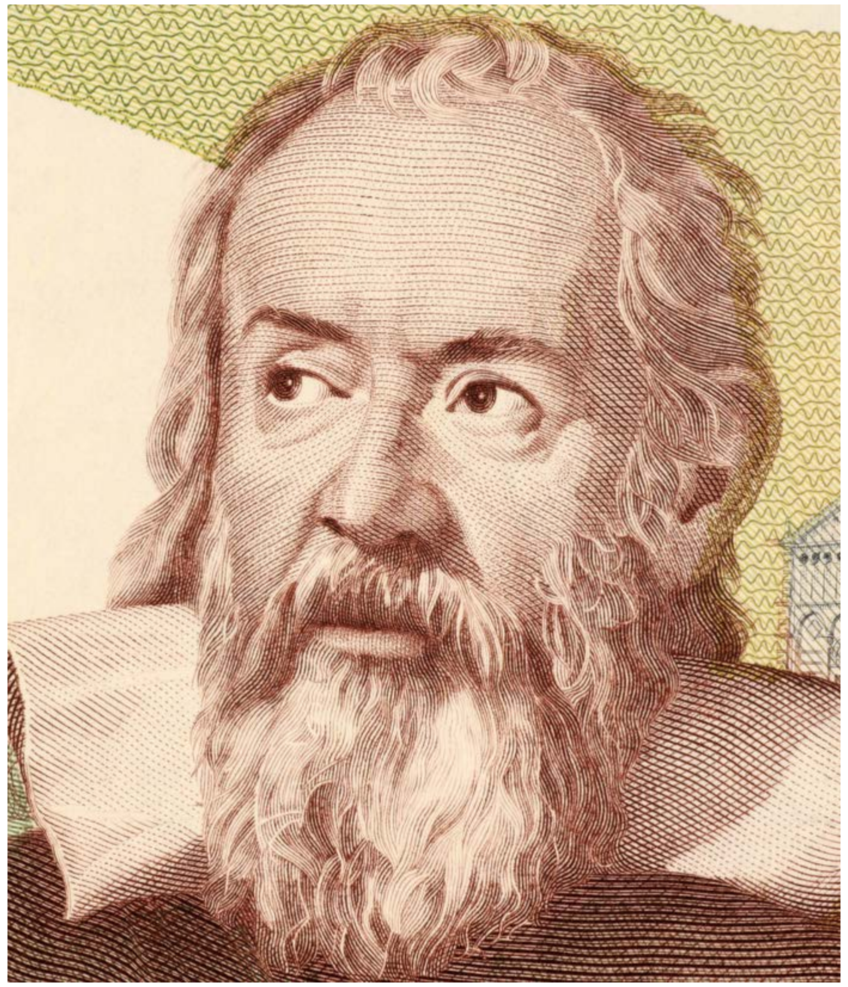
Gottfried Leibniz
(1646-1716)

Leonhard Euler
(1707-1783)

Existem infinitos maiores do que outros infinitos?

O paradoxo de Galileu Galilei (1564 — 1642)

"Não vejo outra solução que não seja a de que todos os números são infinitos; que os quadrados são infinitos; e que a imensidão dos quadrados não é menor que a de todos os números, nem maior, e, em conclusão, que os atributos de igualdade, maior que e menor que, não têm lugar no infinito, mas só nas quantidades finitas."



Cantor nos faz contar

DÓ RÉ MI FÁ SOL LÁ SI

O que é contar?

MATEMATIQUE

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI
1	2	3	4	5	6	7

Contar é estabelecer uma bijeção

MATEMATIQUE

ideogram

$$1 \longleftrightarrow \bigstar$$
$$2 \longleftrightarrow \triangleleft$$
$$3 \longleftrightarrow \blacksquare$$
$$4 \longleftrightarrow \bigcirc$$

Dois conjuntos *A* e *B* possuem o mesmo número de elementos, ou a mesma <u>cardinalidade</u>, quando existe uma bijeção entre *A* e *B*.

$$\#A = \#B$$

O paradoxo de Galileu Galilei diz que

$$\#\mathbb{N} = \#\{n^2; n \in \mathbb{N}\}.$$

Contar é estabelecer uma bijeção

O aparente paradoxo de Galileu Galilei é a constatação de que $\#\mathbb{N} = \#\{n^2; n \in \mathbb{N}\}.$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 & \cdots \end{array}$$

No Hotel de Hilbert sempre há vagas

א0 - contáveis e infinitos

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \cdots
\end{array}
$$

$$\#\mathbb{N} = \#\{2n; n \in \mathbb{N}\}$$

א0 - contáveis e infinitos

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots
\end{array}$$

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$$

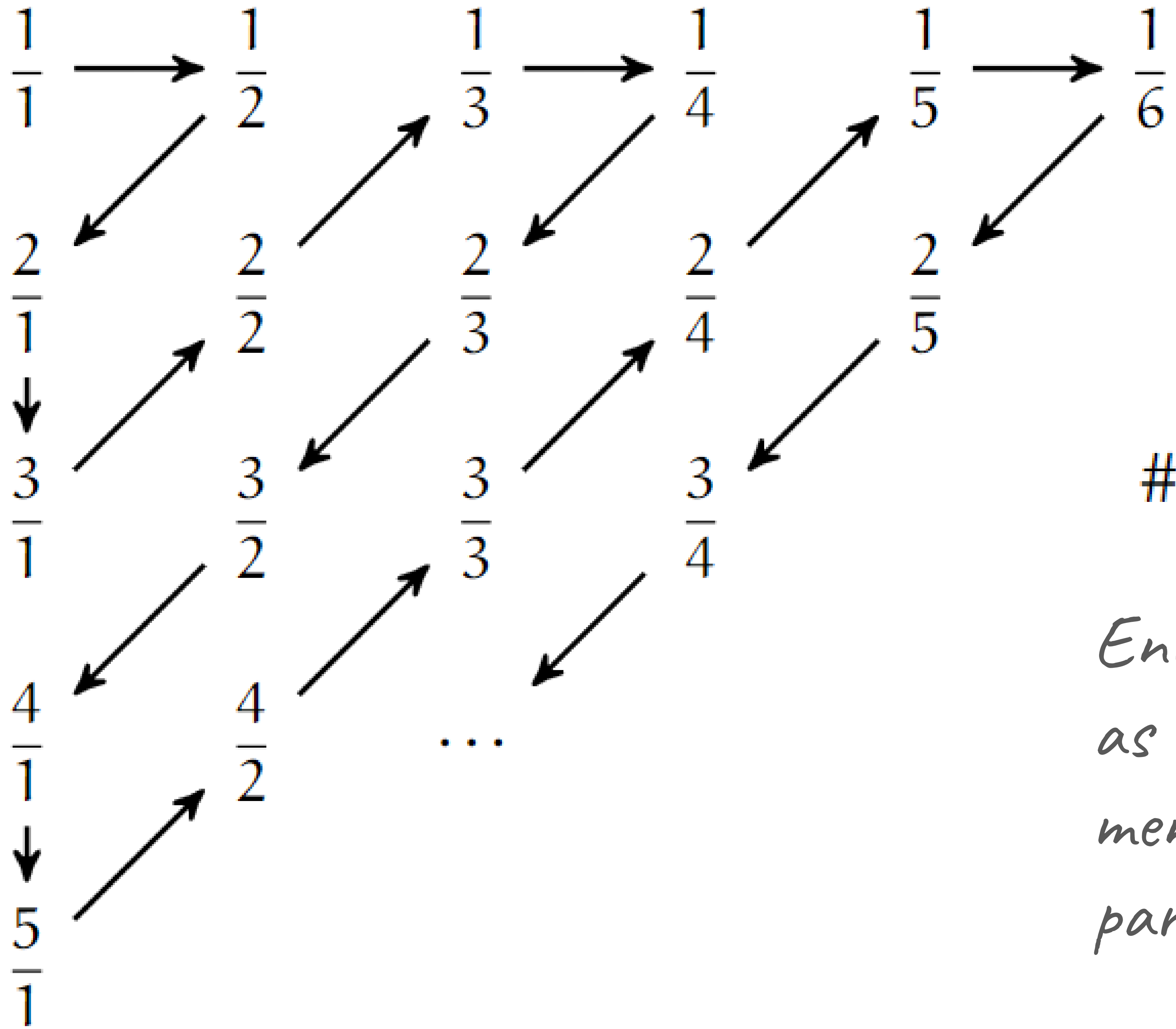
א0 - contáveis e infinitos

MATEMATIQUE

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \frac{1}{5} \arrow[r] & \frac{1}{6} \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & & \\
\frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \dots & & & \\
\frac{5}{1} \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$$

א0 - contáveis e infinitos



$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q} = \aleph_0$$

Então Galileu estava certo, as relações de maior que ou menor que não funcionam para infinitos... Será?

A cardinalidade de IR - A culpa é das estrelas

"Não sou formada em matemática, mas sei de uma coisa: existe uma quantidade infinita de números entre 0 e 1. Tem o 0,1 e o 0,12 e o 0,112 e uma infinidade de outros. Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros. Um escritor de quem costumávamos gostar nos ensinou isso. [...] Você não imagina o tamanho da minha gratidão pelo nosso pequeno infinito. Eu não o trocaria por nada nesse mundo. Você me deu uma eternidade dentro dos nossos dias numerados, e sou muito grata por isso."

Hazel Grace – A culpa é das Estrelas (John Green)

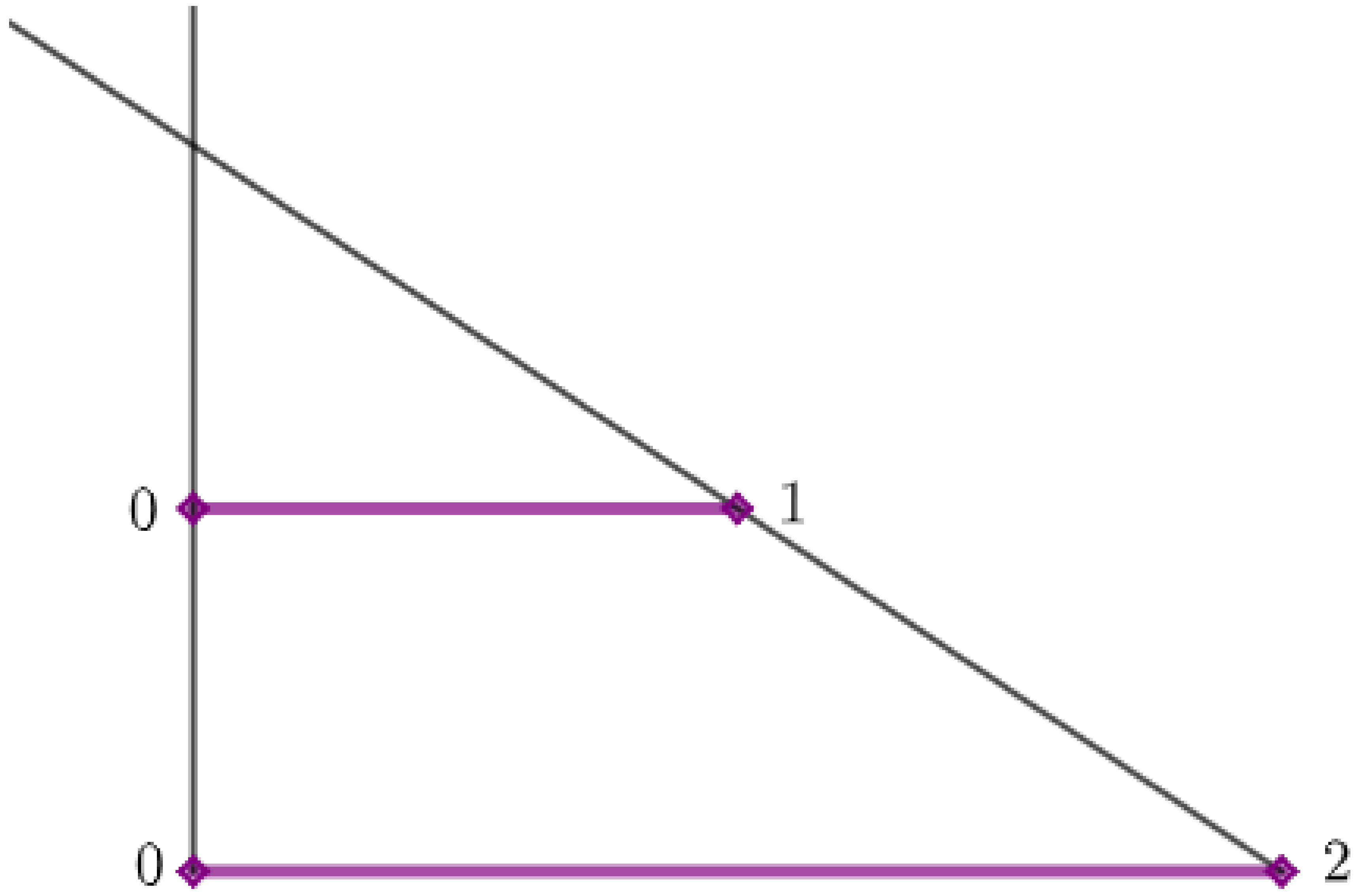
Será?

A culpa é das estrelas

MATEMATIQUE

"Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão. Alguns infinitos são maiores que outros."

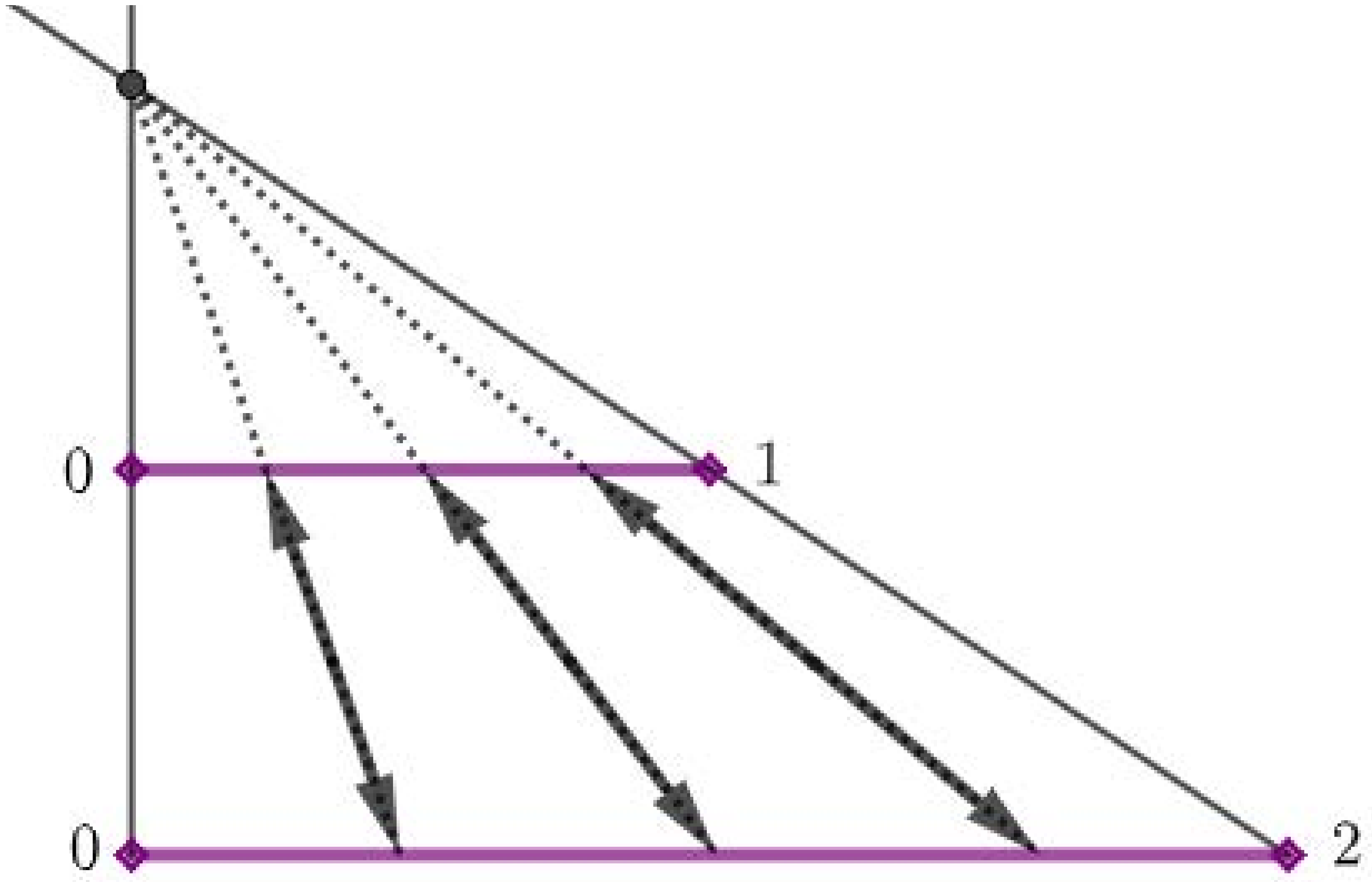
Hazel Grace – A culpa é das Estrelas (John Green)



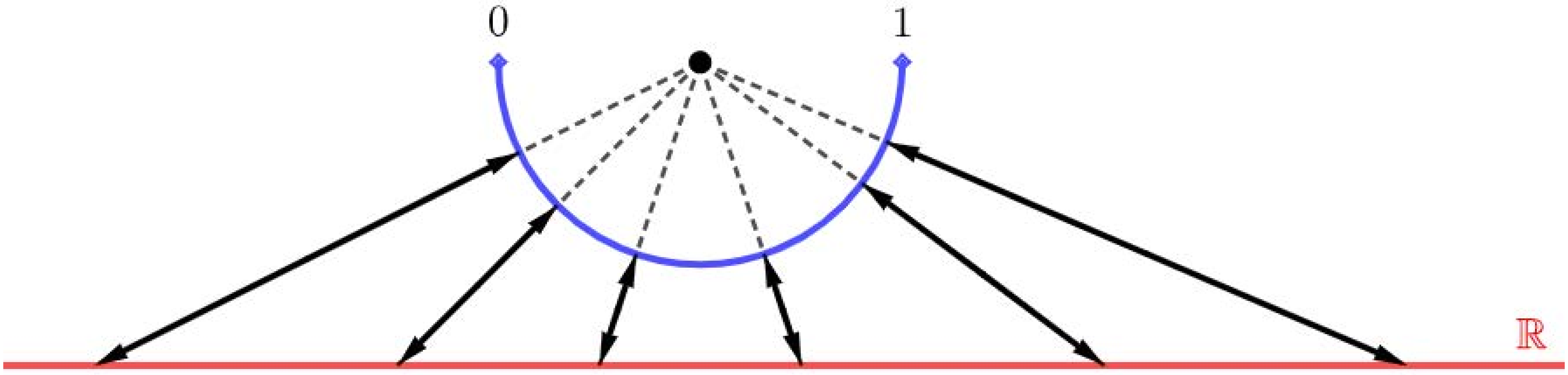
A culpa é das estrelas

"Obviamente, existe um conjunto ainda maior entre o 0 e o 2, ou entre o 0 e o 1 milhão (ops, não é bem assim). Alguns infinitos são maiores que outros."

Hazel Grace – A culpa é das Estrelas (John Green)



A cardinalidade do intervalo unitário é a mesma de $\mathbb{R}$



Mas Hazel não estava totalmente enganada...

Sim, alguns infinitos são maiores que outros

A diagonalização de Cantor

$$
\begin{aligned}
1 &\longleftrightarrow 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\
2 &\longleftrightarrow 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\
3 &\longleftrightarrow 0, a_{31}a_{32}a_{33}\cdots \\
&\vdots \\
k &\longleftrightarrow 0, a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Se definirmos $x = 0, x_1x_2x_3\cdots$, com os algarismos $x_1 \neq a_{11}$; $x_2 \neq a_{22}$; $x_3 \neq a_{33}\cdots$; $x_k \neq a_{kk}$, e assim por diante, teremos um número que pertence ao intervalo $(0, 1)$ mas que não está listado acima, pois se diferencia do k-ésimo número da lista no k-ésimo dígito depois da vírgula. Logo, $\#(0, 1) > \aleph_0$, ou seja, **existem infinitos maiores do que outros.**

MATEMATIQUE

A cardinalidade de $\mathbb{R}$

Conjunto das partes

$$A = \{0\}$$
$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}\}$$

$$B = \{0, 1\}$$
$$P(B) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$C = \{0, 1, 2\}$$
$$P(C) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Conjunto das partes

$$\#A = 1 \qquad \#P(A) = 2$$
$$\#B = 2 \qquad \#P(B) = 4$$
$$\#C = 3 \qquad \#P(C) = 8$$

Seja S um conjunto com n elementos. Queremos contar os seus subconjuntos, ou seja, encontrar $\#P(S)$. Observe que, na construção de um subconjunto qualquer, há 2 opções para cada elemento de S: pertencer ou não pertencer a este subconjunto. Assim, pelo Princípio Multiplicativo,

$$\#P(S) = \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{n \text{ vezes}} = 2^n.$$

MATEMATIQUE

A cardinalidade de $\mathbb{R}$ (ou do intervalo unitário)

Vamos escrever os números do intervalo (0,1) no sistema binário

Decimal	Binário
$0,5 = 2^{-1}$	$0,1_2$
$0,25 = 2^{-2}$	$0,01_2$
$0,1$	$0,0001100110011\cdots_2$
$0,95$	$0,111100110011\cdots_2$

MATEMATIQUE

A cardinalidade de $\mathbb{R}$ (ou do intervalo unitário)

Fazemos uma bijeção entre o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ e o intervalo $[0, 1]$ da seguinte forma: os elementos do subconjunto indicam as posições do dígito 1 na escrita binária do número.

Decimal	Binário	
$0,5 = 2^{-1}$	$0,1_2$	$\longleftrightarrow \{1\}$
$0,25 = 2^{-2}$	$0,01_2$	$\longleftrightarrow \{2\}$
$0,1$	$0,0001100110011\cdots_2$	$\longleftrightarrow \{4,5,8,9,12,13,\cdots\}$
$0,95$	$0,111100110011\cdots_2$	$\longleftrightarrow \{1,2,3,4,7,8,11,12,\cdots\}$

Consideramos $0 \longleftrightarrow \emptyset$ e $1 \longleftrightarrow \mathbb{N}$. Logo, $\#\mathbb{R} = \#[0,1] = \#P(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$.

MATEMATIQUE

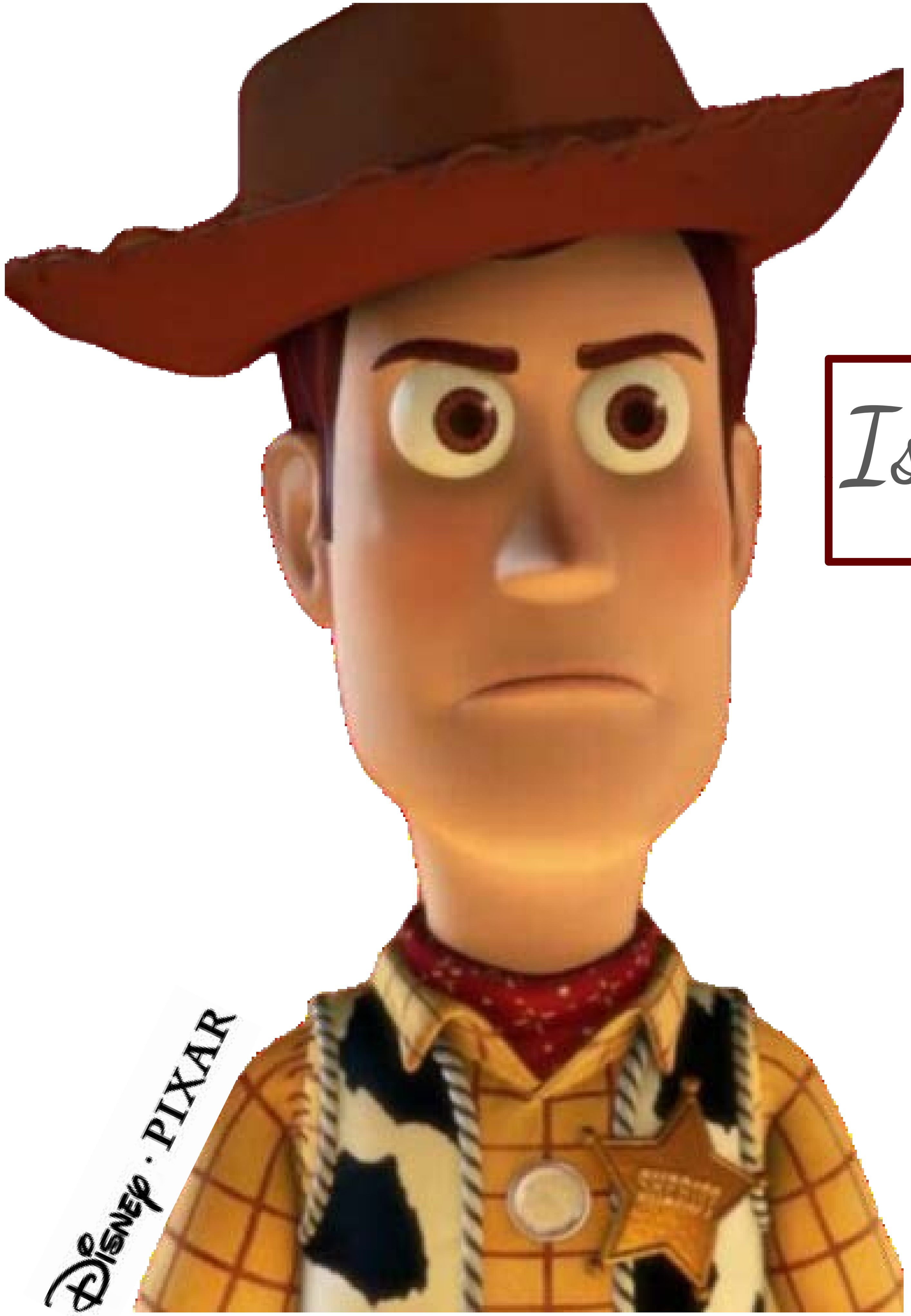
A Hipótese do Continuum

"Não existe nenhum conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto dos números inteiros e menor que a do conjunto dos números reais."

$$\mathfrak{c} = \#\mathbb{R} = \aleph_1$$

Minha demonstração não coube aqui

MATEMATIQUE



Isso é um blefe!

Desculpe...

MATEMATIQUE

A Hipótese do Continuum

Axiomas de Cantor → Axiomas de Zermelo-Fraenkel

A hipótese do continuum não pode ser provada como falsa usando o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Kurt Gödel - 1938

A hipótese do continuum não pode ser provada como verdadeira usando o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Paul Cohen - 1963

"proposição formalmente indecidível"

MATEMATIQUE

Infinitamente grata pela atenção

MATEMATIQUE

Créditos

- *Ao infinito e além (COM Geomestres Slay, Colégio Militar de Porto Alegre) - Clubes de Matemática da OBMEP - http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura-ao-infinito-e-alem/*

- *Cardinalidade dos conjuntos infinitos: Uma abordagem para o ensino básico - Iago de Andrade Dantas - PROFMAT (2021) - https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/32694/1/Cardinalidadeconjuntosinfinitos_Dantas_2021.pdf*

- *Cardinality of the Continuum - jHan - https://www.youtube.com/watch?v=iaUwNuaSLUk*

- *História do Infinito - https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/~ommartins/seminario/cantor/histinfinito.htm*

- *O infinito e outras coisas estranhas - Prof. Luciano Monteiro - https://www.youtube.com/watch?v=OaFvdAzJTtw*

- *Os INFINITOS e a HIPÓTESE DO CONTÍNUO - Tem Ciência - https://www.youtube.com/watch?v=Olh5tPdCaeM*

Clubes de Matemática da OBMEP
Disseminando o estudo da matemática