



# Olimpíadas e Círculos de Matemática e a Pedagogia de Nikolay Konstantinov

Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA

# Problema 1

Seja  $n \geq 4$  um número natural,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $\mathcal{P}_2$  o conjunto formado por todos os subconjuntos de  $X$  com dois elementos. Construa uma bijeção  $f : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$  com a propriedade que se  $f(A) = B$ , então  $A \cap B = \emptyset$ .

# Problema 2

Um mágico com os olhos vendados dá 29 cartas numeradas de 1 a 29 para uma mulher da plateia. Ela esconde duas cartas no bolso e devolve as restantes para a assistente do mágico.

A assistente escolhe duas cartas dentre as 27 e um homem da plateia lê, na ordem que quiser, o número destas cartas para o mágico. Após isto, o mágico adivinha o número das cartas que foram escondidas pela mulher.

Como o mágico e sua assistente podem combinar uma estratégia para realizarem esse truque?





Н. Н. Константинов

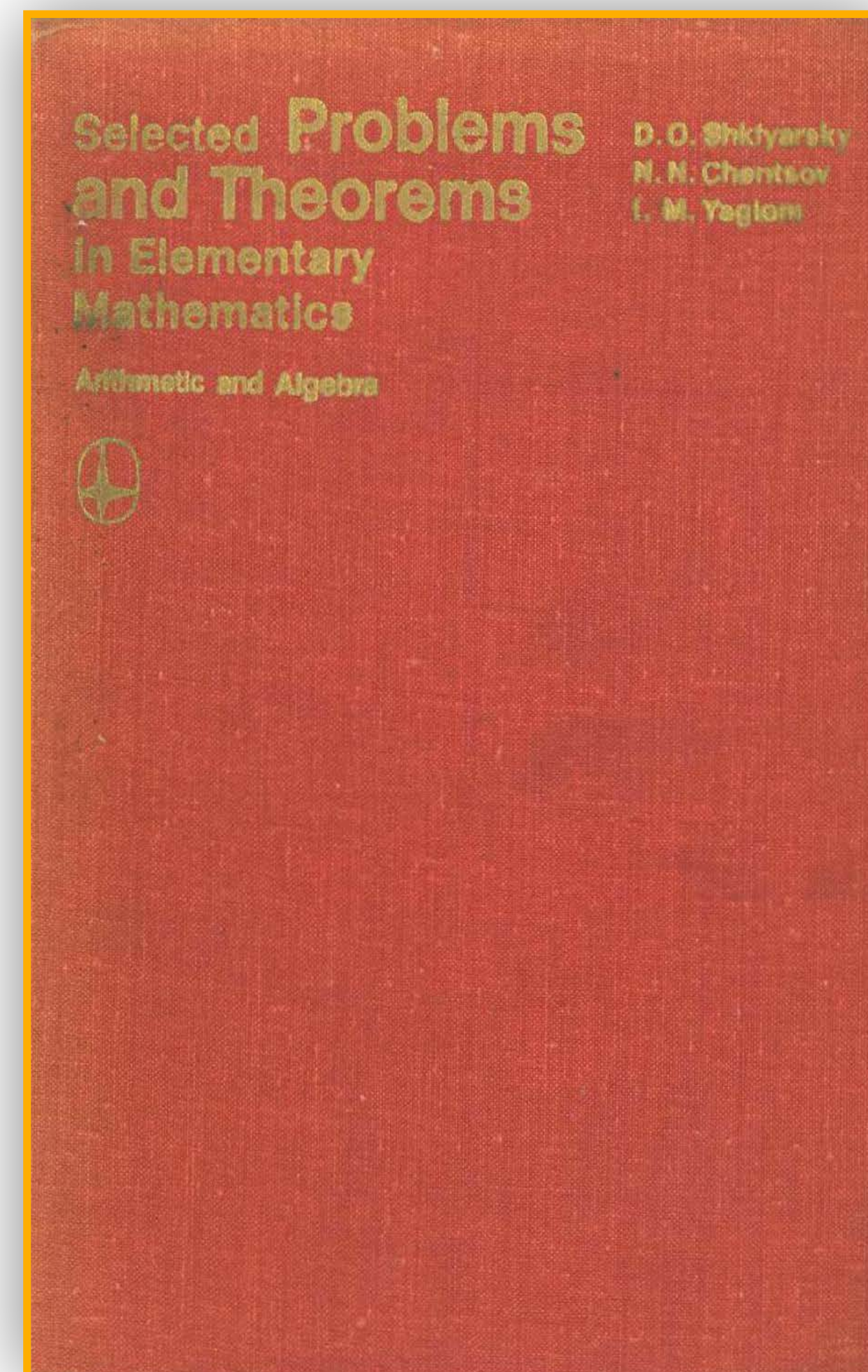
Contexto



# Introdução

## Influências

- Paixão pela maneira russa de propor problemas.





# Introdução

## Influências

- Participação em Olimpíadas e em aulas de preparação.



Equipe brasileira na IMO 1993 em Instambul com Morgado e Tomescu



# Introdução

## Influências

- Participação como professor em Olimpíadas como OBM, Numeratizar e OBMEP.



Coordenador do PECI – OBMEP (2009)



# Introdução

## Influências

- Artigo do Notices of the AMS – Dezembro de 2022

## Nikolay Konstantinov, 01.02.1932–07.03.2021, a Mathematical Educator Par Excellence

*Alexander Shen and Serge Tabachnikov*



**Figure 1.** Nikolay Konstantinov (2007).

One<sup>1</sup> would be hard pressed to find an individual who had a greater influence on mathematical education in the Soviet Union, and later in Russia, than Nikolay Konstantinov. This is especially remarkable since Konstantinov never occupied a position of any importance in the Soviet educational system, and most of the work that he did remained “under the radar” of the Soviet authorities.

It is impressive when David defeats Goliath, but it is even more so if Goliath doesn’t even realize it.

*Alexander Shen is the directeur de recherche at LIRMM, France. His email address is alexander.shen@lirmm.fr.*

*Serge Tabachnikov is a professor of mathematics at Pennsylvania State University. His email address is sot2@psu.edu.*

*Communicated by Notices Associate Editor William McCallum.*

*For permission to reprint this article, please contact: reprint-permission@ams.org.*

DOI: <https://doi.org/10.1090/noti2590>

<sup>1</sup>Some photos and graphics that can be found online cannot be reprinted for copyright reasons. Links have been provided in such cases.

In this article, we describe Konstantinov’s role in mathematics education in the USSR and Russia. We illustrate the story with quotations from Konstantinov himself (the translation into English is ours).

In a nutshell, Nikolay Konstantinov organized and maintained an extremely successful and robust, yet informal, system of high-level mathematics circles, mathematics classes, and mathematics competitions. Many renowned mathematicians have made their first steps in mathematics within this framework.

*Mathematics circles.* Today mathematics circles are quite popular, and there is no need to explain what they are: according to Math Circle Network <https://mathcircles.org>, there are about 300 math circles in the USA. The American Mathematical Society publishes a book series “MSRI Mathematical Circles Library” that offers a wealth of circle-related materials.

Konstantinov was involved in running mathematical circles since the 1950s, continuing the tradition of Moscow mathematical circles that started in the 1930s.

How can one help the high school student discover that mathematics is exciting and beautiful? In Konstantinov’s recollection, the initial idea was

to invite all the interested students and present to them the main ideas of contemporary mathematics.

But there were obvious problems with that plan.

To start with, it wouldn’t hurt to know the ideas of contemporary mathematics. Secondly, it’s not clear why the ideas of modern mathematics are

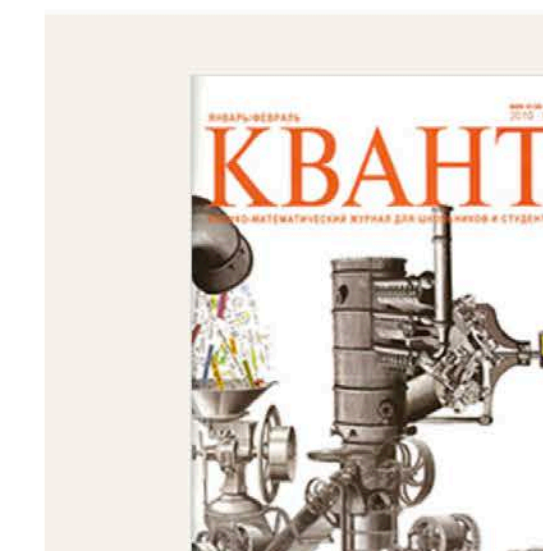
# Fontes de Pesquisa



## Интервью с Н. Н. Константиновым

«КВАНТ» №1, 2010 • МАТЕМАТИКА, ОБРАЗОВАНИЕ • КОММЕНТИРОВАТЬ

инов — выдающийся организатор математического и системы математических классов в Москве. иственного в своем роде международного — Турнира городов, в котором принимают участие твительный член Московского общества испытателей ического общества. Представляет в Европе Всемирную матических соревнований. Преподает в московской 179 ной математической медалью имени Пола Эрדеша.



Entrevista com N. N. Konstantinov

**МЦНМО** МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

An English version of our web pages is available

<b>О нас</b>	<b>У нас на сайте</b>	<b>«Добрые соседи»</b>
<b>Цели и задачи</b>	<b>Математические кружки</b> Кружки МЦНМО      Кружки Малого мехмата	Этюды • Mathesis • В.О.Ф.Э.М. MathNetRu • MathEduRu
<b>Попечительский совет</b>	<b>Математические школы и классы</b>	<b>«Журнальный зал»</b> Квантик • Квант • МатПросвещение о заочных мат. конкурсах
<b>Партнеры МЦНМО</b>	<b>Олимпиады для школьников</b>	<b>Новости</b>
<b>Наши координаты</b>	Московская математическая олимпиада Турнир городов Устные математические олимпиады Математические бои Олимпиады по программированию	14.10.23 — Мат. регата для 9 классов (регистрация до 09.09) 04.09.23 — начало семестра в НМУ 26.08.23 — семинар памяти И.Я.Сироватского 14.08.23 — умер В.А.Зорич 12.08.23 — появляются видеозаписи ЛШСМ-2023 30.07.23 — ушел из жизни Г.Г.Левитас 27.07.23 — не стало А.Н.Андреевой
<b>Сведения об образовательной организации</b>	<b>Математический праздник</b> Турнир Ломоносова Математические регаты Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина	<i>Из истории...</i> Мы помним...
<b>Наши web-проекты</b>	<b>Независимый Московский университет</b>	
<b>Problems.ru</b>	Расписание на текущий семестр Материалы курсов и видеозаписи Библиотека НМУ	
<b>Задачи по геометрии</b>	Семинар «Глобус» Программа «Math in Moscow» Научные конкурсы	
<b>Math.Ru</b>	<b>Летняя школа «Современная математика»</b> 2023, 2022, МатВечера...	
<b>Учредители МЦНМО</b>	<b>Школам и учителям</b>	
<b>Префектура ЦАО г. Москвы</b>	Творческий конкурс Вероятность в школе	Семинар учителей математики Выездные семинары учителей
<b>Департамент образования и науки г. Москвы</b>	<b>Книги и журналы</b>	<b>«Математическая книга»</b>
<b>Отделение математики РАН</b>	Свободно распространяемые издания	Серии книг
<b>Математический институт имени В.А.Стеклова РАН</b>	<b>Мат. образование (статьи, полемика...)</b>	
<b>МГУ имени М.В.Ломоносова</b>	Исследовательская работа школьников    ЛКТГ    ММКШ	
	<b>Компьютеры, Internet, электронная почта</b>	

Copyright ©1996–, МЦНМО

Website [mccme.ru](http://mccme.ru)

*Journal of Russian & East European Psychology*, vol. 54, no. 1, 2017, pp. 1–117.  
© Taylor & Francis Group, LLC. All rights reserved.  
ISSN: 1061-0405 (print)/ISSN 1558-0415 (online)  
DOI: <https://doi.org/10.1080/10610405.2017.1352391>



EUGENE MATUSOV

## Nikolai N. Konstantinov’s Authorial Math Pedagogy for People with Wings

*This special issue is dedicated to an innovative pedagogy by Soviet-Russian math educator Nikolai Nikolaevich Konstantinov. Diverse and at times contradictory interviews with Konstantinov, math teachers involved in his pedagogy, and former students, available sources in Russian and English, and my own memoirs as a former student of Konstantinov, I tried to reconstruct, define, analyze, evaluate, and problematize his innovative pedagogy. Konstantinov himself defined his innovative pedagogy as promoting “people with wings” – promoting initiative, creativity, ownership, critical thinking, and self-realization among students in math and other areas. In math instruction, Konstantinov focuses on providing students with choices of math problems, interrogating students’ math solutions, and offering guidance in a direct response to the questions and difficulties that the students experience in their particular math problems. I demonstrate his pedagogical approach is integrative aiming not only at math. Emerging tensions between students’ curricular choice and teacher’s imposition, educational elitism and social equality, and teacher’s authorial freedom and Konstantinov’s support are discussed.*

### Introduction

Since 2011, I teach my students—undergraduate, future educators, and graduate, future researchers of education—using the “Open

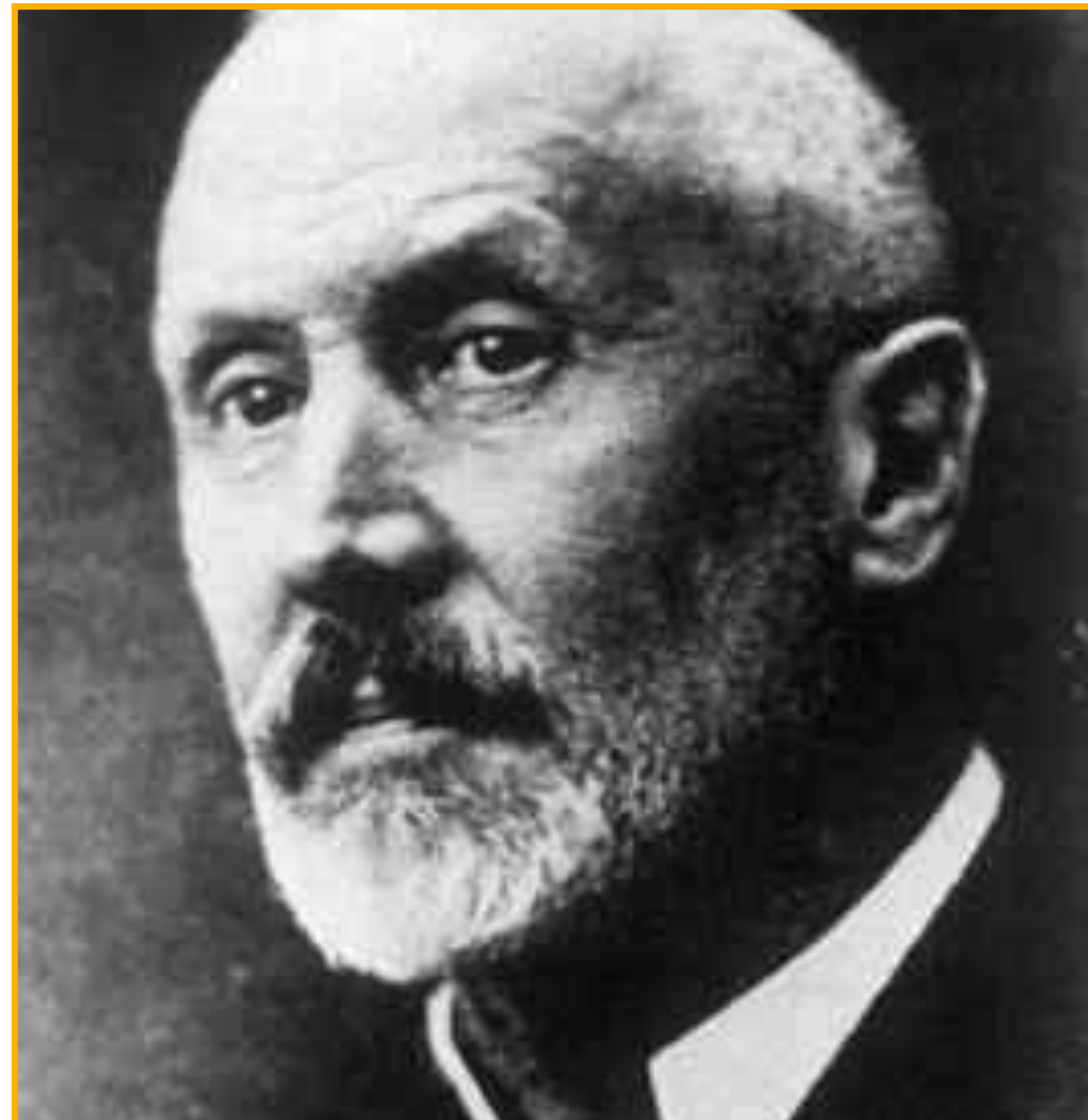
© 2017 Taylor & Francis Group, LLC

# Competições Matemáticas



# Hungria

**1894 – A primeira  
competição**

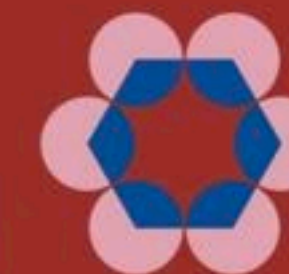


Físico Loránd Eötvös de Vásárosnamény – ministro da educação – fundador da Sociedade de Matemática e Física da Hungria

**A honra pode ser uma força motriz.** O Prêmio Eötvös era considerado um sucesso na Hungria naquela época. Todo estudante brilhante estava ansioso para ganhá-lo. O prêmio era uma grande honra, não apenas para si mesmo, mas também para os professores e a escola.

**(HING, 2002)**

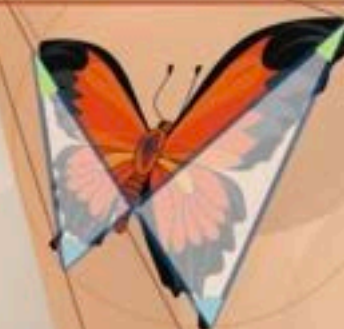




**KöMaL**

**Középiskolai  
 Matematikai  
 és Fizikai Lapok**

1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%  
 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1% 1%

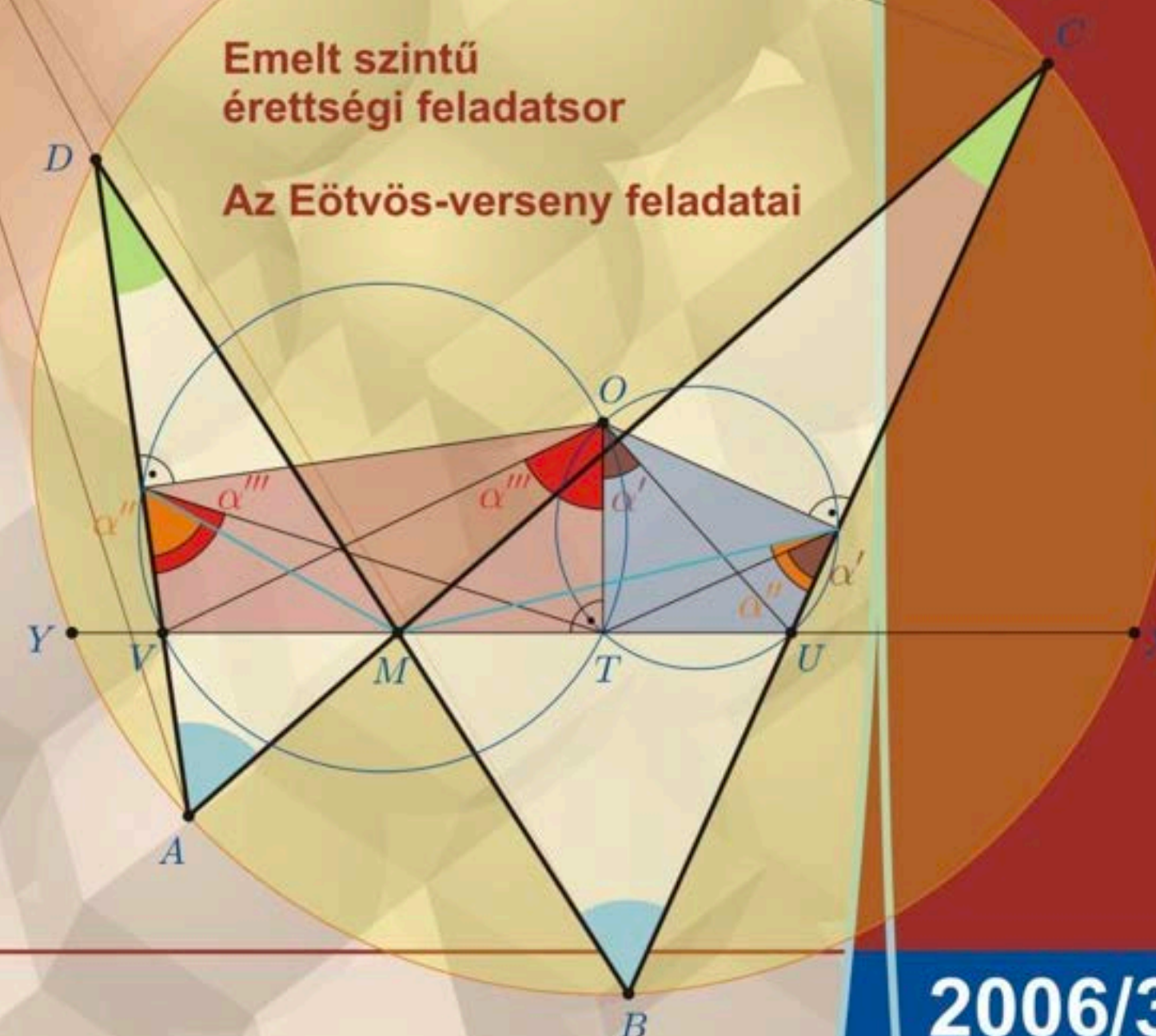


Számítási közép,  
 mértani közép...

Variációk egy versenyfeladatra

Emelt szintű  
 érettségi feladatsor

Az Eötvös-verseny feladatai



# Kömal

1894 – Középiskolai  
 Matematikai és Fizikai Lapok

A Bolyai János Matematikai Társulat és  
 az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata

**2006/3**

56. évfolyam  
 2006. március

Capa da revista Kömal 2006/3

**A** seção de problemas em KöMal também desempenhava um papel semelhante. A melhor solução era impressa com o nome e a escola do autor, para que todos pudessem ver. Portanto, seria realmente uma honra ter seu nome aparecendo na revista.

**(HING, 2002)**



**A**lém disso, o sucesso na resolução de problemas alimentava nos jovens um maravilhoso gosto pela alegria de uma aventura intelectual criativa, que traçava o caminho para a vida.

**(HING, 2002)**

# Olimpíadas de Leningrado e Moscou 1934 e 1935





(Olimpíada de Leningrado – 1961)

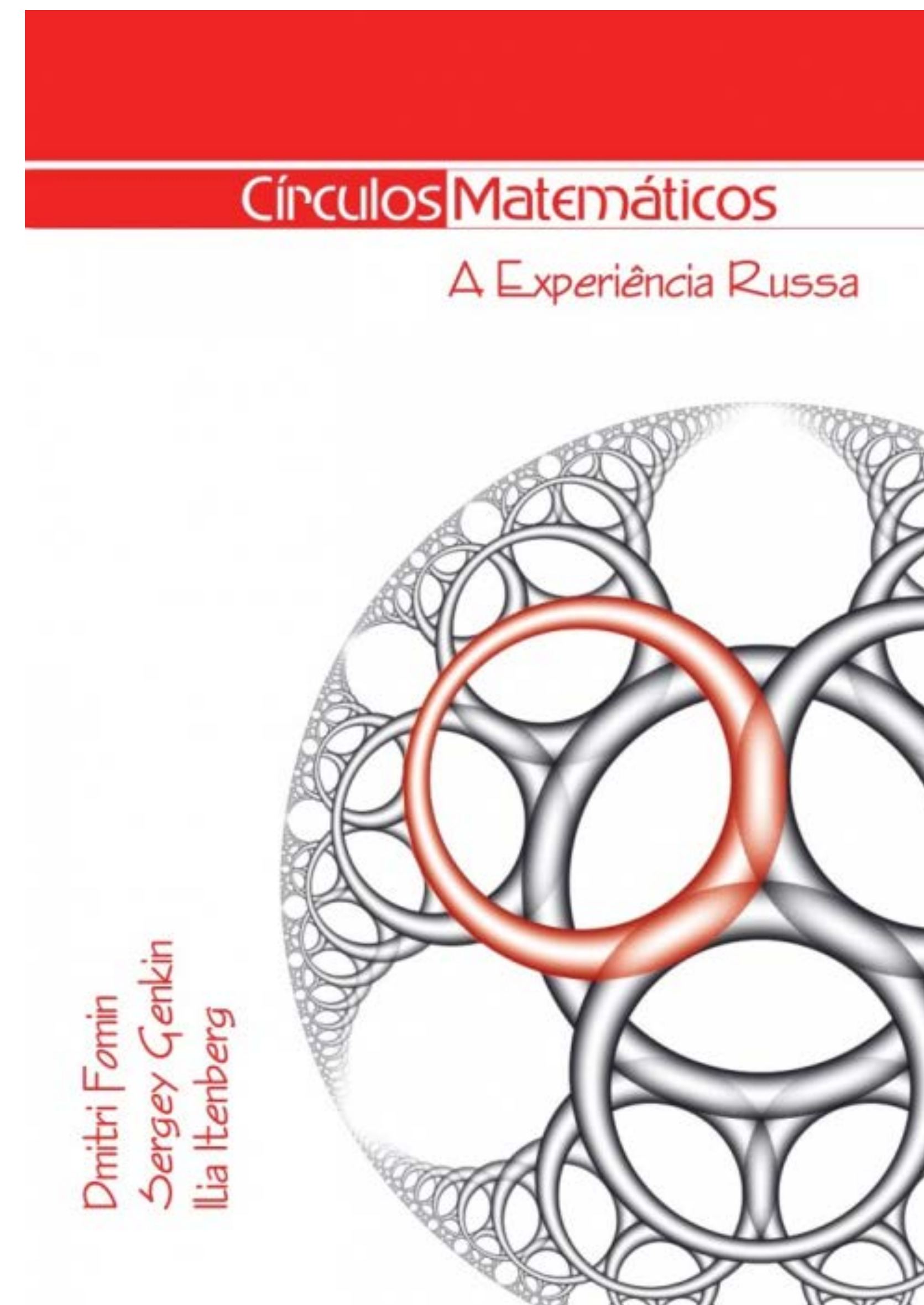
**Prove que, entre qualquer grupo de seis pessoas, sempre haverá três pessoas que são mutuamente conhecidas ou três pessoas que são mutuamente desconhecidas entre si.**

# Círculos Matemáticos



# Círculos Matemáticos

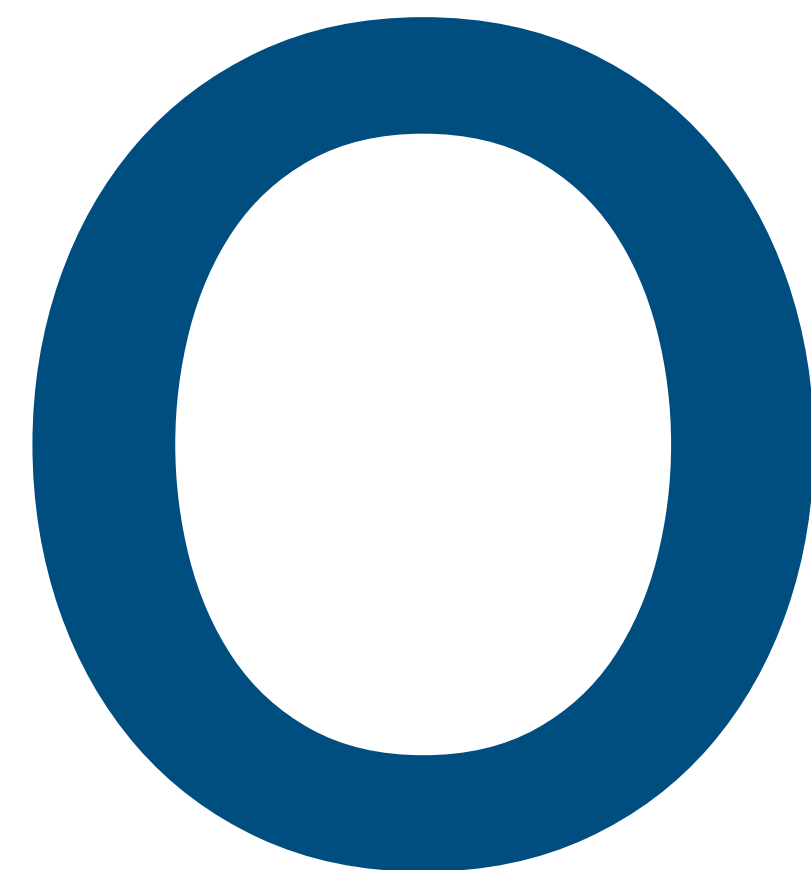
- Nascem na Rússia com a criação das primeiras Olimpíadas de Matemática.
- O formato foi sendo definido com a prática.
- Influência de Nikolay Konstantinov a partir dos anos 60.



**N**os círculos matemáticos, os alunos resolvem problemas divertidos, familiarizam-se com belos enredos matemáticos e acostumam-se ao raciocínio lógico e rigoroso. Os temas das aulas são muito diversos (e, via de regra, não estão diretamente relacionados ao currículo escolar). Normalmente, em aula, um aluno recebe uma folha com tarefas, resolve-as e discute-as individualmente com o professor (para isso costumam estar presentes vários professores). As principais tarefas e ideias são discutidas no quadro negro.

<https://www.mccme.ru/circles/mccme/2024/>





**Os círculos matemáticos são espaços de aprendizagem criativa onde a matemática é explorada regularmente e em profundidade. Os estudantes trabalham ao lado de profissionais em um ambiente colegiado com o objetivo de explorar a riqueza e a beleza da matemática por meio de atividades lúdicas e desafiadoras que convidam à reflexão, ao mesmo tempo em que promovem a comunicação e o trabalho colaborativo. A ênfase está no jogo/brincadeira e no rigor, modelando a maneira como os matemáticos fazem matemática.**

O principal local onde as pessoas recebiam educação adicional significativa era o círculo na Faculdade de Mecânica e Matemática (Mechmat). Uma vez, Igor Rostislavovich Shafarevich, acadêmico e renomado matemático, disse: “Os círculos matemáticos no mechmat são lugares maravilhosos”. Segundo ele, eles eram maravilhosos porque qualquer pergunta era discutida pelo tempo que fosse necessário. Não havia pressa. Não era como se tivéssemos que terminar esse tópico até uma determinada data e, portanto, tivéssemos que ir mais rápido, com algumas pessoas recebendo uma nota baixa e outras correndo para acompanhar. Nada disso. Qualquer assunto era examinado em detalhes, pelo tempo necessário. E esse é exatamente o estilo que é necessário na ciência



# Características dos Círculos Russos

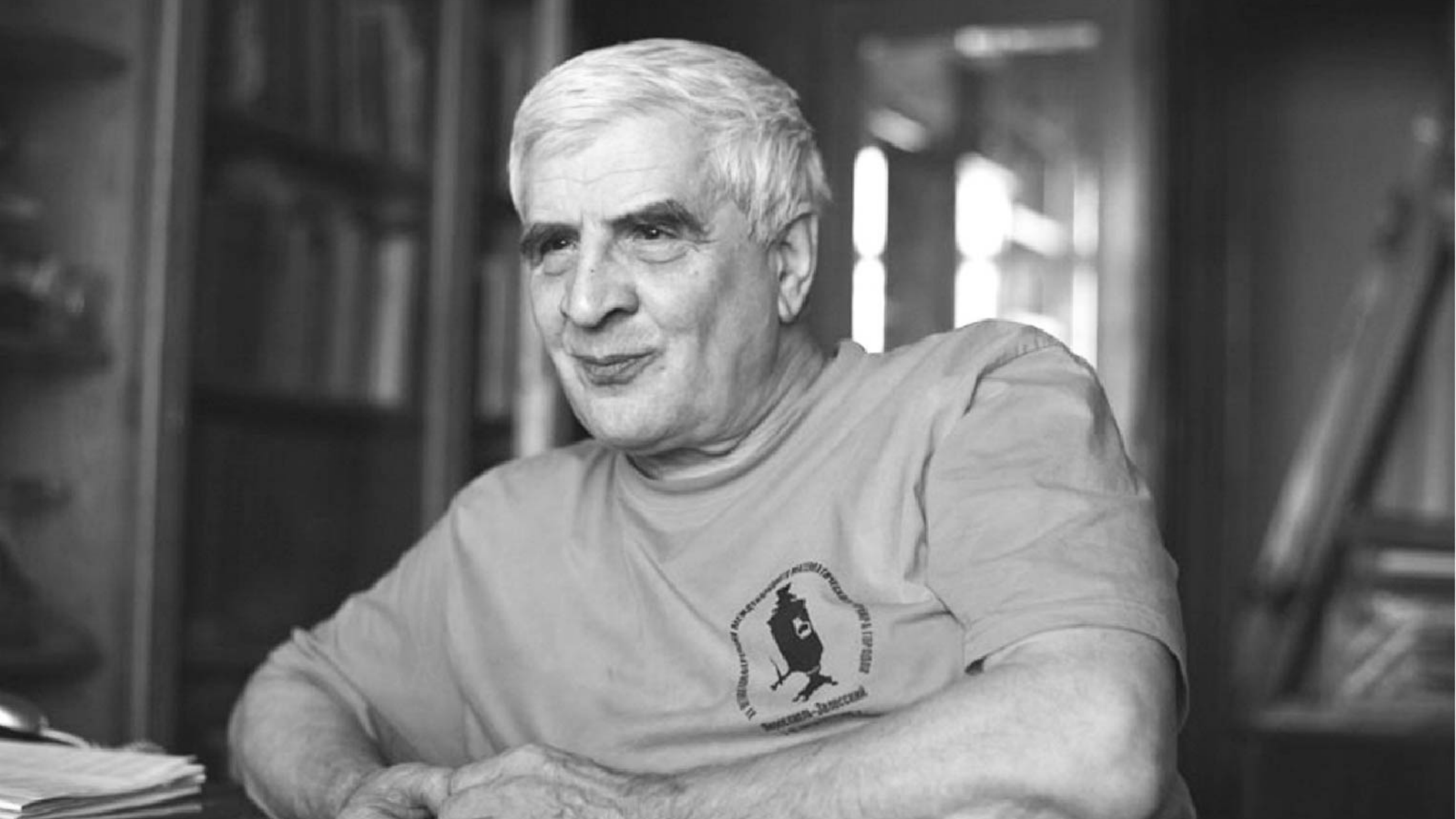
1. Reuniões regulares
2. Resolução de problemas não convencionais
3. Folhas de problemas
4. Desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas
5. Análise de soluções anteriores
6. Acesso aberto e gratuito
7. Flexibilidade de participação
8. Ausência de benefícios formais

Foi um conceito muito novo e emocionante para mim: **educação voluntária!** Eu estudava porque gostava, e não porque era obrigado ou pressionado a estudar. Sentia como se vivesse em outro país, diferente do país onde muitos dos meus colegas viviam. Sentia a liberdade de me realizar. Era um oásis de liberdade e inspiração em contraste com a vida monótona, prescrita e controlada de um jovem adolescente soviético em Moscou, na estagnada União Soviética pós-totalitária.

**MATUSOV**



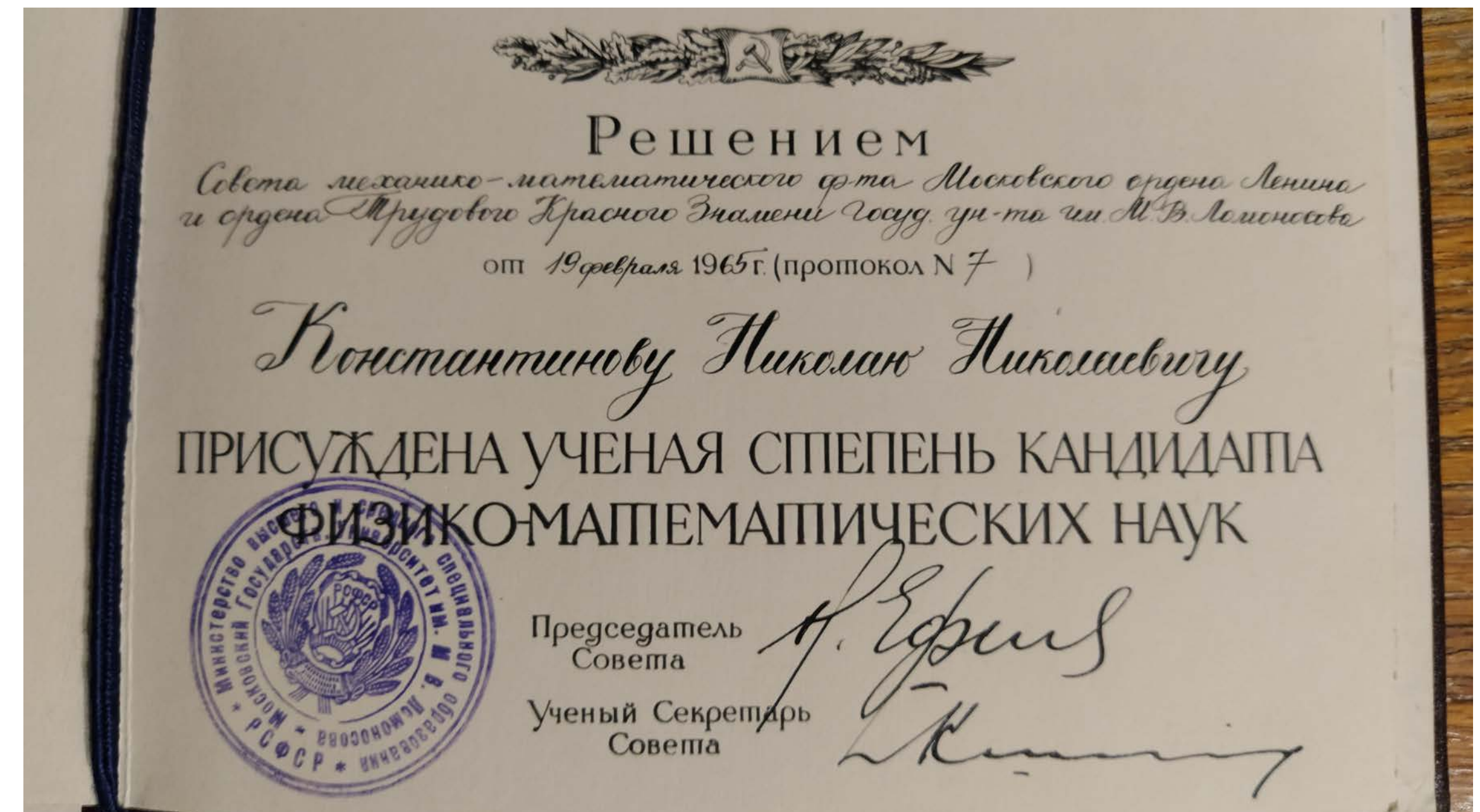
**Николай Николаевич Константинов**  
(02.01.1932 – 03.07.2021)





# Breve Biografia 1

- Nasceu em 02/01/1932
- A **biologia** foi sua primeira paixão
- Conheceu as **olimpíadas** na escola (Física e Matemática)
- Entrou para o departamento de **Física** da MSU.
- Começou a **liderar círculos** ainda na faculdade.
- Concluiu o **doutorado em Ciências Físico-Matemáticas** com a tese "Algumas questões da geometria teórica de curvas planas".



# Breve Biografia 2

- Criou o sistema de aulas especiais em Matemática.
- Criou o Torneio Lomonosov.
- Criou o Torneio Internacional das Cidades.
- Fundou a Universidade Independente de Moscou.
- Foi ativo até o fim da vida, inclusive em escolas do ensino básico.
- Faleceu de COVID em 03 de Julho de 2021

# Pedagogia de Konstantinov



# Pedagogia para pessoas com asas

**Os princípios fundamentais de trabalho em aulas de matemática são minuciosidade, ritmo lento e autonomia.**

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**

**A** falta de **minuciosidade** leva à perda de interesse. Um aluno que não compreende completamente algo uma vez, duas vezes, etc., “contamina” seus estudos a ponto de começar a odiá-lo...

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**



O papel principal do professor não é explicar e dar palestras, mas avaliar e verificar cuidadosamente, apontando todos os erros, ao mesmo tempo mantendo um interesse aguçado nos sucessos do aluno. Esse interesse é o principal estímulo que o professor tem a oferecer, em vez das notas que, é claro, também motivam, mas infelizmente, de maneira equivocada.

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**

**R**itmo lento significa que cada ponto difícil leva o tempo necessário. Não é um problema se não se cobre muito material, o problema começa quando se precisa “cobrir” uma certa quantidade de material até um determinado prazo, independentemente de ser bem ou mal. Isso é um problema real: como resultado, nada é aprendido e todos perdem o interesse, tanto os alunos quanto os professores.

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**

**A**utonomia significa que uma parte substancial do material teórico, às vezes quase todo o material, é aprendido pelos alunos por conta própria: eles resolvem a maioria dos problemas e provam a maioria dos teoremas por si mesmos. Uma palestra direta do professor não é muito eficaz...

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**



**S**ob esse sistema, não é necessário um controle ocasional por meio de uma prova ou exame, mas um controle contínuo constante. E para isso, são necessários muitos professores. A solução é envolver estudantes universitários... Esses estudantes universitários revivem sua “infância matemática” com seus alunos do ensino médio, e suas relações com eles são semelhantes às relações entre irmãos mais velhos e mais novos, enquanto as relações dos professores com os alunos se assemelham às relações entre pais e filhos. A presença de estudantes universitários na turma muda substancialmente a atmosfera, apagando as barreiras de idade.

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**

O curso natural de aprendizado em matemática é tal que uma pessoa inicialmente se interessa por um problema e então de alguma forma começa a se aprofundar nele. No entanto, nas palestras, acontece o contrário: você nem teve tempo para descobrir o que é interessante em um problema e já lhe é fornecida uma solução. Um teorema está sendo lido, mas você não sabe para que serve, e então precisa aprendê-lo, depois mais um, e outro, e assim por diante por cinco anos. Mas isso já está errado.

**Nikolai Nikolaevich Konstantinov**

# Pedagogia Tradicional x de Konstantinov

## Segundo Matusov

- **Propósito da Educação:** Prática da Matemática x “asas” nos alunos.
- **Orientação:** Discurso Autoritário x **Discurso Internamente Persuasivo.**
- **Ambiente de aprendizado:** atribuições forçadas x **aprendizado de livre escolha.**
- **Pedagogia:** técnicas e estratégias pedagógicas que garantem a aprendizagem dos alunos do currículo pré-definido x **pedagogia autoral, baseada na autoria pedagógica dos professores e na autodidática dos alunos.**



# Princípios

1. O educador ele próprio deve **ter asas fortes**.
2. Não deve haver pressão sobre os alunos que os distraia de seus interesses, entusiasmos e inspirações (ou seja, “asas”), por meio da criação de um regime pedagógico de sobrevivência.
3. O educador **deve evitar ou sabotar as notas**, que constantemente criam pressão.
4. O educador deve **evitar o regime de tarefas** que colonizam os alunos e os distraem do que eles desejam e estão animados para fazer.
5. O educador deve **evitar a burocratização** e não se deixar guiar por regras. Em vez disso, o educador deve ser orientado por julgamentos autorais do que é bom e do que é ruim em cada situação específica e assumir a responsabilidade pessoal por suas próprias decisões arriscadas.
6. O educador **deve evitar ver o aluno de forma limitada** de modo a não permitir que os alunos desenvolvam asas em um campo mais amplo ou até mesmo completamente diferente.
7. O educador deve **envolver o aluno na definição de seus próprios problemas e objetivos**.